# 1. Основные понятия и определения

# 1.1 Цель курса

Целью изучения дисциплины «Математические модели и методы в расчетах на ЭВМ» является приобретение навыков составления математических моделей по словесному описанию исследуемого объекта, а именно:

- в соответствии с постановкой задачи составить математическое описание;

- среди выходных параметров исследуемого объекта выбрать критерий оптимальности, для которого записать выражение целевой функции;

- выбрать метод решения, на основе которого разработать модель решения;

- выбрать среду программирования или математический пакет и выполнить программирование, получить выходные результаты;

- суметь оценить полученные результаты и по ним сделать вывод о качестве разработанной математической модели.

Модель - это упрощенная копия объекта, сохраняющая его важнейшие свойства необходимые для решения поставленной задачи.

Моделирование - это способ описания изучаемой системы (оригинала) в упрощенном виде (модели) и использование полученной модели для изучения свой оригинала.

Наибольшее распространение получили физические и аналоговые модели. Например, планетарий - это физическая модель вселенной, лотки с водой могут быть физической моделью гидроэлектростанции. Физическое моделирование имеет ограниченные возможности, т. к. не всегда его можно использовать. Для этого достаточно указать такие объекты как организационные, технологические, вычислительные системы, производственные процессы, которые практически не допускают своих физических аналогов. Аналоговые модели имеют физическую природу, отличную от оригинала, но они имеют сходные с оригиналом процессы функционирования. Аналоговые модели, например, используются при исследовании свойств вычислительной техники, функционирования систем, описывающихся системами дифференциальных уравнений и др. Пружинный маятник может являться аналоговой моделью для изучения колебаний основных характеристик электрической цепи переменного тока, поскольку оба процесса описываются одинаковыми уравнениями колебаний [31].

Математическое моделирование является разновидностью аналогового и основано на построении математической модели.

Под математической моделью будем понимать концентрацию наших знаний, представлений и гипотез об оригинале, записанную с помощью математических соотношений. Или иначе, математическая модель - это система упрощенных предположений об объекте, допускающих математическую формализацию и применяемых, когда точные закономерности неизвестны или сложны.

Для построения математических моделей используют весь обширный математический аппарат:

* линейные уравнения и системы уравнений;
* дифференциальное и интегральное исчисление;
* теорию вероятности и математическую статистику;
* методы скалярной и векторной оптимизации;
* теорию алгоритмов;
* методы структурного программирования и др.

В свою очередь математические модели подразделяются на дескриптивные (описательные) и оптимизационные. Дескриптивные модели служат для описания и прогнозирования объекта (процесса, системы). Цель оптимизационных моделей - найти оптимальное воздействие на объект (процесс).

Различают микро- и макромодели. Микромодель – модель отдельных частей объекта, макромодель – модель объекта в целом. Система микромоделей детальней, чем макромодель.

Метамодель – модель рассматриваемого объекта с учётом его взаимодействия с внешней средой.

Преимуществом математического моделирования над физическим моделированием является то, что одна и та же модель может характеризовать объекты различной природы. Например, дифференциальное уравнение второго порядка [26]:

. (1.1)

*m*

*k*

*z*

Рис. 1.1 - Пружинный маятник

Решив дифференциальное уравнение, получим функцию *z(t)*, которая будет характеризовать нахождение координаты центра тяжести груза в любой момент времени t (рис.1.1):

, (1.1)

где k – жесткость пружины, m – масса груза.

*c*

*Рис 1.2 -Колебательный контур*

Решив дифференциальное уравнение, получим функцию *z(t)*, которая будет характеризовать заряд конденсатора в любой момент времени t (рис. 1.2):

, (1.2)

где с - значение емкости конденсатора, *L* - значение индуктивности катушки.

# 1.2 Изоморфные и гомоморфные системы

Объект исследования называют системой, и любую модель объекта также называют системой. Система характеризуется входными (*х*) и выходными (*у*) параметрами (рис. 1.3).

объект

исследования

*x*

*y*

*Рис. 1.3 – Схема объекта исследования*

Рассмотрим две системы: систему-оригинал и систему-модель. Входы систем соответственно: . Выходы систем: Если для любого момента времени t можно записать:

 и , (1.3)

то говорят, системы изоморфны (идентичны).

Из соотношений (1.1) следует, что реакция изоморфных систем на внешние воздействия должна быть совершенно одинаковой. Примерами таких систем могут быть типовое технологическое оборудование, типовые сорта выпускаемой продукции и др.

На практике совпадения выходных данных модели и оригинала получить сложно. Поэтому модель и оригинал лишь приблизительно схожи и в реальных условиях соотношения (1.3) практически не обеспечиваются. Почему это происходит?

Создавая модель некоторого объекта (оригинала), исследователь, как правило, стремится к её упрощению, воплощая в модель те свойства исследуемого объекта, которые ему необходимы для достижения поставленной цели. При этом опуская менее существенные с его точки зрения черты и стороны оригинала, т.е. при разработке модели делаются некоторые допущения.

В результате такого упрощения происходит сокращение размерности состояний системы- оригинала. При этом каждому состоянию системы-оригинала будет соответствовать вполне определённое (одно единственное) состояние системы-модели. Однако определённому состоянию системы-модели может соответствовать несколько состояний системы-оригинала (т.е. при одних и тех же входных данных оригинала выходные данные модели могут быть различными в силу влияния помех). В этом случае говорят, что система-модель гомоморфна по отношению к системе-оригиналу. Обратное утверждение неверно, т.е. система-оригинал не является гомоморфной по отношению к системе-модели.

Таким образом, модель есть система гомоморфная по отношению к оригиналу.

# 1.3 Система и ее свойства

Запишем два определения понятия система.

Первое определение понятия система из «Энциклопедического словаря»: система - это множество взаимосвязанных элементов, находящихся в отношениях и связях друг с другом, образующих определенную целостность, некоторое единство. Второе определение: система - это совокупность объектов, связанных между собой и с окружающей средой определенными связями, причем внутренние связи сильнее внешних. А какой объект, процесс или явление можно считать системой?

Чтобы рассматриваемый объект, процесс или явление можно было считать системой он должен обладать следующими свойствами:

* целостность и делимость;
* наличие существенных связей;
* наличие определенной организации;
* интегративность.

Дадим расшифровку каждому свойству.

* 1. Целостность и делимость. Это свойство означает, что с одной стороны система - это некоторое целостное образование, а с другой стороны - в ее составе могу быть выделены подсистемы и элементы. Система может быть расчленена на конечное число подсистем (первого уровня, второго уровня и т.д.). Деление (или детализация) может происходить до тех пор, пока получатся подсистемы, относительно которых в рамках рассматриваемой задачи имеется договоренность об их неделимости. Конечным итогом может быть подсистема или элемент системы. Опять же, все зависит от целей исследования. Элемент системы - это не делимая ее часть.

Таким образом, деление на подсистемы (элементы) является - условным и зависит от целей, назначения и задач проводимого исследования. Степень детализации принимается ЛПР - лицом, принимающим решение, но, несмотря на делимость системы - это в общем единое целое.

Причём сама система при определённых условиях может рассматриваться как элемент более высокого уровня иерархического разбиения.

* 1. Наличие существенных связей*.* Это свойство, по которому можно выделить систему из внешней среды в виде целостного образования. Связи между элементами системы по силе и мощности превосходят связи этих элементов с элементами внешней среды.

Связь можно определить как вид соединения элементов системы между собой и с внешней средой. Она представляется некоторым физическим каналом, по которому происходит обмен информацией, энергией, веществом. Поэтому различают связи: информационные, энергетические и вещественные. Возможны и смешанные связи. По направлению действия связи бывают прямые, обратные и нейтральные. Прямые осуществляют связь между выходом одного элемента и входом любого последующего элемента той же системы, а обратные - между выходом и входом одного и того же элемента. Обратные связи также могут осуществляться через другие предшествующие элементы. Обратные связи бывают положительные и отрицательные. Положительная обратная связь приводит систему в неустойчивое состояние, она используются, как правило, для усиления маломощных сигналов. Отрицательная обратная связь приводит систему в устойчивое состояние.

* 1. Наличие "определенной организации*.* Организация системы - это формирование (установление) существенных связей между элементами, упорядочивание и распределение связей и элементов во времени и пространстве. Организация системы - это по существу построение структуры.

Структура системы - это совокупность устойчивых связей системы, обеспечивающих ее целостность и сохраняющих основные ее свойства при различных внешних и внутренних изменениях. Наличие структуры дает возможность сохранять основу системы при внешних и внутренних воздействиях [17].

*а) б) в)*

*Рис. 1.4 - Классификация структур в зависимости от взаимодействия элементов и связей:* а) - иерархическая;   
б) - сетевая (многосвязная); в) - сотовая

4. Интегративность- это наличие таких свойств системы, которыми обладает система в целом, но не обладает ни один её элементов в отдельности.

Например, самолет - по частям и весь целиком. Последнее основополагающее свойство - способность летать - является определяющим.

Кроме рассмотренных выше требований, объект должен еще обладать такими свойствами как управляемость и наблюдаемость.

Управление - это процесс целенаправленного воздействия на поведение системы при изменении внешний условий функционирования.

Управляемость- это наличие таких рычагов или управляющих воздействий, с помощью которых систему можно было бы привести, в случае необходимости, в устойчивое состояние [21].

Наблюдаемость - это возможность получения информации о поведение системы.

# 1.4 Системный подход

Изучение объекта, процесса или явления с позиции системы вызвало формирование нового подхода в науке - системного подхода.

Выделим основные черты системного подхода.

Системный подход - это форма методологического познания, связанная с исследованием и созданием объектов как систем, и относится только к системам.

Системный подход требует многоуровневого изучения предмета - иерархичность познания. Объект изучается на “собственном” уровне (связи внутри, его структура). Этот же объект изучается как элемент более широкой системы – “вышестоящий” уровень, и затем изучение этого же объекта в соотношении с составляющими данный объект элементами – “нижестоящий” уровень.

Системный подход требует рассматривать объект не изолированно, а во взаимосвязи с окружающей средой.

С учётом сказанного определим понятие системного подхода: системный подход - это подход к исследованию объекта (проблемы, явления, процесса) как к системе, в которой выделены элементы, внутренние и внешние связи, наиболее существенным образом влияющие на исследуемые результаты его функционирования, а цели каждого из элементов, подчинены его общему предназначению [11].

Можно также сказать, что системный подход - это такое направление методологии научного познания и практической деятельности, в основе которого лежит исследование любого объекта как сложной целостной социально-экономической системы.

Таблица 1.1

Классификация математических моделей

|  |  |
| --- | --- |
| Признак | Классы моделей |
| 1. Характер отображаемых свойств объекта | ∙ Структурные модели  ∙ Функциональные модели |
| 2. Назначение модели | ∙ Модель синтеза  ∙ Модель анализа  ∙ Модель принятия решения |
| 3. Степень детализации | ∙ Микромодель  ∙ Макромодель  ∙ Метамодель |
| 4. Способ представления свойств объекта. | ∙ Модель описания  ∙ Модель решения  ∙Алгоритмическая модель  ∙ Программная модель |
| 5. Способ получения модели | ∙ Теоретическая модель  ∙ Эмпирическая модель (экспериментальная) |

# Структурная модель. Функциональная модель

Структура объекта - это совокупность устойчивых связей объекта, обеспечивающих его целостность и сохранение основных свойств при различных внешних и внутренних изменениях.

Структура - это относительное, неизменное в объекте, то, что не сразу изменяется или разрушается под действием внешних причин.

Рассматривая конкретные объекты, можно выделить различные толкования структур.

Пример 1. Структура какой-либо организации или системы, состоящих из нескольких объектов. Здесь структура означает элементный состав объекта, и каков характер связи между ними.

Например - мафиозная организация или крестный отец или, как ее называют, иерархическая структура (см. рис. 1.4).

Пример 2: структура математического выражения (модели) - общий вид выражения.

Например: - квадратное алгебраическое уравнение;

- дифференциальное уравнение второго порядка.

Пример 3: структура потока жидкости двух типов - ламинарный и турбулентный.

Таким образом, структурная модель применяется для описания сложных объектов, состоящих из нескольких элементов, которая отражает элементный состав объекта и характер связей между ними.

Наиболее наглядной является графовая модель.

Граф – это совокупность конечного множества и заданные на нем бинарные отношения.

Функция объекта – это совокупность процессов, определяющих поведение объектов. Тогда, отсюда следует, что модель этой функции называют функциональной моделью, то есть она отражает те законы природы, согласно которым функционирует данный объект. Функциональная модель изображают в виде математических соотношений, которые описывают эти законы природы [28].

Например: согласно второму закону Ньютона, сила тяжести, это есть произведение массы тела на его ускорение, а ускорение, это есть вторая производная координаты по времени: .

# 1.6 Модель синтеза. Модель солида. Модель принятия решения

Синтез – создание или разработка чего-либо.

Анализ – исследование или изучение чего-либо.

Модель синтеза позволяет создать объект с заданным набором свойств. Модель солида позволяет изучить свойства созданного объекта.

Структурный синтез – создание структуры объекта.

Параметрический синтез – это процесс определения параметров (номиналов) элементов синтезируемого объекта, при которых будут удовлетворены условия задачи.

Пример: компания реализует продукцию в пяти городах: *A, B, C, D, E* с населением соответственно 80, 60, 50, 40, 20 тысяч.

Имеется пять торговых агентов различных профессионального уровня, который определяется в процентной реализации покупательской способности: 70, 60, 50, 45, 40.

Вопрос: как распределить агентов по городам, чтобы число реальных покупателей было максимально?

В рассматриваемой задаче надо создать систему связей «агент-город», то есть синтезировать некую структуру с заданным свойством (максимальное количество покупателей), следовательно, это задача структурного синтеза.

Пусть решением рассмотренной выше задачи получили конкретный вариант структуры (записан слева в табл. 1.2).

Таблица 1.2

|  |  |
| --- | --- |
| Агент | Город |
| 1 —>  2 —>  3 —>  4 —>  5 —> | E  D  C  A  B |

Вопрос: определить свойства данной структуры, для чего необходимо посчитать, сколько покупателей будет вовлечено.

Это можно сделать по формуле:

, (1.4)

где *i* — номер агента; *j* — номер города; **- уровень профессиональных способностей *i-*го агента;  - число жителей *j* -города;  - булева переменная

 (1.5)

Так как здесь изучаются свойства созданной структуры, следовательно, этозадача структурного анализа.

Различают также простой и оптимальный синтез. При оптимальном синтезе одно из заданных условий – достижение максимальной эффективности от созданной модели.

Пример задачи простого синтеза (на условии выше рассмотренной задачи): распределить агентов так, чтобы П>120000. При подсчете по формуле (1.4), структура удовлетворяет этому свойству, а следовательно, является решением задачи.

Рассмотрим параметрический синтез.

Любая модель имеет входные параметры - исходные данные, и выходные – результаты расчетов.

При известной (заданной или синтезированной) структуре объекта, задав значение входных параметров, мы полностью определяем свойства объекта, а вычислив входные параметры, узнаем какие-то свойства.

Модель параметрического синтеза позволяет определить необходимые значения входных параметров, так чтобы выходные удовлетворяли некоторым условиям: ?; *Y*.

Модель параметрического анализа – позволяет определить значения выхода по заданному входу:.

Задача синтеза и анализа – это формулировка некоторых требований, которые позволяют решить поставленную задачу. Как правило, задача анализа проще, чем задача синтеза.

Иногда бывает сложно определить, с какой задачей мы имеем дело.

Например, имеем модель , возможны варианты:

- если *х* – это объект, то решаем задачу синтеза;

- если записано, что , то решаем задачу анализа, то есть при каком значении *х* функция *у* будет равна 0.

Модель принятия решения - это набор правил, которые позволяют выбрать какую-либо из имеющихся вариантов модель.

*да*

Прин. реш.

*нет*

*Параметрический уровень*

Струк.

анализ

Прин.

реш.

Парамет. анализ

Парамет. синтез

Структ.

синтез

*Структурный уровень*

*да*

*нет*

*Рис. 1.6 - Схема взаимодействия моделей по назначению*

Пример 1: (для задачи выше) этот набор правил звучит следующим образом: структура «агент-город» пригодна, если П>120000 (П – число покупателей).

Пример 2: объект характеризуется двумя параметрами *х* и *у*.

Имеем 2 объекта: и . Правило звучит следующим образом: объект *А* считается лучшим, если некоторый критерий эффективности .

# Модель описания. Модель решения. Алгоритмическая модель. Программная модель

Эти модели представляют собой различные способы описания одних и тех же свойств в объект на разных фазах процесса моделирования от постановки задачи (словесного описания) до получения итоговых результатов (рис. 1.7).

Постановка задачи (словесное описание свойств объекта)

Модель описания

Модель решения

Аналитическая Численная Имитационная

Алгоритмическая модель

Программная модель

Готовые результаты

*Рис. 1.7 - Схема взаимодействия моделей по назначению*

Словесное описание объекта не является моделью, а является исходными данными (или представлением объекта) к рассмотрению.

Модель описания - это переложение на математический язык словесного описания (или описание в виде математических символов свойств объекта, изложенных в словесном описании).

Пример: Маша собрала 2кг грибов, Саша – на 1 кг больше. Сколько они собрали вместе? Аналитическое описание имеет вид:

 (1.6)

Модель решения - это набор зависимостей и правил, в виде математических выражений, указывающих способ получения решения задачи.

Существует три основных типа модели решения.

Аналитическая модель решения - представление искомой величины в виде явной зависимости через исходные данные.

Например: (для рассмотренной выше задачи). Аналитическая модель решения будет иметь вид:

 (1.7)

; (1.8)

 (1.9)

где - столбец свободных членов,

По методу определителей для решения системы линейных уравнений (или его еще называют метод Крамера): 

Численная модель решения – это набор выражений, позволяющих получить решение в виде совокупности чисел. Решение в этом случае получаем приближенное. Данная модель применяется, если аналитическая модель очень сложно или ее просто не существует. В качестве примера можно привести метода Ньютона для решений уравнений вида  в практике.

Пусть  выбор точки начального приближения .

Рекуррентная формула имеет вид:

. (1.10)

В результате получаем последовательно решение *xk* - решение приближенное, т.е. . Решение будет тем точнее, чем меньше заданная погрешность.

Имитационная модель решения – переложение на язык персонального компьютера (ПК) формальных правил, по которым функционирует объект моделирования согласно словесному описанию или аналитической модели описания. Эти правила позволяют при заданных входах определить выходные параметры. Данная модель используется для решения очень сложных задач, для которых, как правило, невозможно составить аналитическую модель описания, а существует лишь словесное описание.

Алгоритмическая модель – запись модели решения в виде алгоритма (блок схемы).

Программная модель – запись алгоритма в одном из языков программирования.

# 1.8 Теоретическая модель. Эмпирическая (экспериментальная) модель

Теоретическая модель, полученная как следствие некоторых фундаментальных законов природы или из некоторых других результатов исследования возведенных в ранг теории.

Экспериментальная модель, полученная с помощью математической обработки результатов экспериментов, проведенных на объекте.

Пример: получим уравнение (модель) равноускоренного движения двумя способами.

Рассмотрим теоретический способ решения задачи. В качестве отправной точки (исходных данных) возьмем два закона (два определения).

1) Определение ускорения – ускорение это вторая производная координаты по времени:

Ускорение ( или или ).

2) Движение называется равноускоренным, если его ускорение равно *a=const*.

Тогда из 1 и 2 можно записать, что , при  и , получим - теоретическая модель равноускоренного движения.

Обычно плохообусловленная модель – это результат каких-то ошибок (например, экспериментальных). То есть теоретическая модель в этом случае была бы замкнутая, но за счет погрешностей (например, коэффициентов) получилась плохо обусловленная. Это может быть в результате неправильной постановки задачи.

Для решения плохо обусловленных моделей используется метод регуляризации. Сущность метода заключается в следующем.

Большинство реальных задач содержат какую-либо дополнительную информацию о поведении объекта. В силу того, что теоретическая модель замкнута, включение дополнительной информации может делать полученную систему уравнений несовместимой. В этом случае всю имеющуюся информацию делят на основную и вспомогательную. Исходя из основной информации, строят модель. Если она получается не замкнутой, то дополнительную информацию полностью включают в модель. Если модель плохо обусловленная, то среди множества возможных решений выбирают такое, чтобы оно в максимальной степени удовлетворяло дополнительным условиям.

Пусть *Ах=В* плохо обусловленная модель некоторой системы, *А*-квадратная матрица, *х* - вектор искомых параметров , *В* – вектор свободных членов модели.

Решение будем искать из условия: , где <> - скалярное произведение двух векторов, - малое число.

Проведем анализ выбранного условия: минимум первого слагаемого *(<Ax-B, Ax-B>)* – скалярного произведения достигается в *х*, удовлетворяющем системе *Ах=В,* причем если система плохо обусловлена (а это задано изначально), то таких *х* будет множество, чтобы не было сильного расхождения, то берут достаточно малым.

По определению: сумма скалярных произведений равна скалярному произведению суммы, тогда с учетом, что I - единичная матрица, имеем:

1) Введем единичную матрицу и внесем const во второе скалярное произведение:

;

2) Сумму скалярных произведений преобразуем в скалярное произведение суммы и сгруппируем члены, содержащие и не содержащие *х*:

.

Проанализируем условие теперь: минимум будет достигнут в том случае, когда *х* есть решение системы  (к каждому элементу вектора В добавили по ; т.е это означает, что в матрицу *А* к диагональным элементам добавили по малому числу *α*.)

Сделали малые добавки и система из плохообусловленной стала хорошообусловенной.

Модель называется замкнутой, если существует конечное множество параметров удовлетворяющей ей. Или иначе, если с ее помощью можно однозначно предсказать поведение объекта. Например, система *n*-независимых уравнение с *n* – неизвестными.

Модель, не удовлетворяющая этим свойствам, называется незамкнутой или открытой.

Например:  решение можно предсказать лишь до постоянных величин, следовательно, модель открытая.

В данном случае неопределенность можно устранить, используя дополнительную информацию (например, некоторые начальные условия), то есть в заданном случае неопределенность устранимая, её называют открытая модель с устранимой неопределенностью [24].

Пример модели с неустранимой неопределенностью. В чаше пять белых и шесть черных шаров. Вероятность выпадения белых шаров  вероятность выпадения черных. Однозначно предсказать, какой шар достанем невозможно, дополнительные условия ничего не дадут, это неустранимая неопределенность.

Если в результате моделирования полученная модель незамкнутая, то для ее замыкания может быть использовано два способа:

1) определение неизвестных параметров из других источников (например, из экспериментов);

2) подключение дополнительных соотношений (например, добавить уравнение).

Открытые модели широко используются в имитационном моделировании. Здесь учитывается главная особенность этих моделей, с их помощью однозначно предсказать поведение объекта (системы) нельзя. Задавая различные значения управляющих воздействий, вычисляют полученные значения выходных параметров, тем самым можно проиграть на модели все возможные ситуации и изучить свойства объекта, сделать некоторые выводы о его поведении.

Между замкнутыми и незамкнутыми моделями находится промежуточный класс – плохообусловленные модели.

Плохообусловленные модели - это модели, в которых отдельные их части (например, уравнения) почти зависимы между собой.

Рассмотрим предыдущий пример неправильного замыкания модели:

 (1.11)

При численном решении таких моделей очень велики погрешности.

Пример 1:

 (1.12)

Пример 2, (округлим коэффициент системы до целых):

 (1.13)

 (1.14)

т. е. первое и второе уравнения почти зависимы между собой.

1-е уравнение

Область решения

2-е уравнение





*Рис. 1.8 – Численное решение*

Рассмотрим эмпирический способ решения задач.

Предположим, что провели ряд экспериментов, пуская тяжелые шары по наклонным желобам. Меняем угол наклона желоба, чтобы изменялось ускорение *а*. Меняем длину желоба, чтобы изменялся путь *х*. Фиксируем время *t* в каждом эксперименте. Получим таблицу значений:

Таблица 1.3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| t | a | x |
| 1 | 1 | 0.15 |
| 2 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 13.5 |
| 4 | 2 | 16 |
| 5 | 1 | 12.5 |
| 6 | 2 | 31 |

Обработав результаты с помощью метода наименьших квадратов, получим такое же уравнение:

. (1.15)

Представим отличия теоретических и экспериментальных моделей в виде таблицы:

Таблица 1.3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Фактор | Теоретическая  модель | Экспериментальная модель |
| Способ получения | Логические следствия законов природы | Математическая обработка экспериментов |
| Сложность исследований объекта | Сложные и всесторонние исследования | Относительно простая серия экспериментов |
| Сложность структуры модели | Высокая сложность: системы алгебраических уравнений, которые нужно решить (т.е. модель описания) | Невысокая сложность: явная зависимость выхода от входа (т.е. модель решения) |
| Область представления | Область широкая: могут быть включены даже точки, не доступные непосредственному наблюдению | Область узкая: вблизи экспериментальных точек |

При синтезе теоретических моделей часть прибегают к упрощающим допущениям: некоторым предположениям о свойствах объекта, при выполнении которых модель существенно упрощается. Например, при равноускоренном движении мы пренебрегали силой трения. Наиболее типичны следующие упрощения:

- полагаем какой-либо параметр равным нулю;

-полагаем какой-либо параметр постоянным;

-полагаем, что два параметра линейно зависят друг от друга.

При теоретическом моделировании также применяются эксперименты. Однако, их роль существенно уже, чем в эмпирических моделях. Главным образом их используют для определения значений каких-либо параметров модели. Например, при теоретическом выводе, модель свободного падения имеет вид , но то, что *g=9,81* можно получить только экспериментально.

# 1.9 Критерии качества математической модели

Любому объекту можно построить множество моделей. Выбрать нужно ту, которая отвечает критериям универсальности и полнотой описания свойств объекта.

Пример: имеем 10 моделей, каждая из которых описывает концентрацию парового вещества в жидкой фазе при различных давлениях:

 (1.16)

Всех их можно заменить одной моделью, т.к. *р* не принимает единственного значения, а может быть разным, т.е *y=f(x,p).*

1) точность – соответствие всех параметров объекта, вычисленных по модели, их истинному (например, полученному из эксперимента). Точность это количественный показатель, бывает абсолютная и относительная. Чем меньше погрешность, тем больше точность.

2) адекватность – способность модели правильно отображать свойства объекта, это количественный показатель.

3) экономичность – показатель суммарных затрат модели (затраты на оплату специалистов, затраты машинного времени и т. д.).

# 1.10 Основные виды математических моделей

В зависимости от конкретной реализации проекта и его аппаратурного оформления, всё многообразие технологических процессов пищевой и химической промышленности можно разделить на четыре класса, исходя из временного и пространственного признаков:

- процессы, переменные во времени (нестационарные);

- процессы, не меняющиеся во времени (стационарные);

- процессы, в ходе которых их параметры изменяются в пространстве;

- процессы без пространственного изменения параметров.

Соответственно этому делению и математические модели, отражающие эти процессы, можно классифицировать следующим образом:

1. модели, неизменные во времени – статические модели;
2. модели, переменные во времени – динамические модели;
3. модели, неизменные в пространстве – модели с сосредоточенными параметрами;
4. модели, изменяющиеся в пространстве – модели с распределенными параметрами.

Рассмотрим модели с сосредоточенными параметрами.

Для данного класса моделей характерно постоянство переменных в пространстве. Математическое описание включает в себя алгебраические уравнения либо дифференциального уравнения первого порядка для нестационарных процессов. Примером объекта, описываемого данным классом моделей, является аппарат с идеальным (полным) перемешиванием потока. Скорость мешалки такова, что концентрация во всех точках аппарата одинакова [22].

Если на вход аппарата подано ступенчатое воздействие, то есть скачкообразное изменение концентрации в момент времени *t=0* от  до - зависимость  примет вид (рис. 1.9а):

, (1.17)

где *с*- значение концентрации в момент времени *t*; - среднее время пребывания частиц потока в аппарате.



*с*

*t*

*t*





а)

б)

*Рис. 1.9 - Зависимость  при ступенчатом воздействии*

Если на вход аппарата подано импульсное воздействие (метод вымывания), т.е. резко подали индикатор на вход аппарата с начальной концентрацией  и резко убрали подачу, то зависимость  примет вид: (рис. 1.10).

Передаточная функция аппарата идеального смешения (апериодическое звено первого порядка) имеет вид:

, (1.18)

где - постоянная времени объекта, с.

Моделью идеального смешения описываются процессы, происходящие в цилиндрических аппаратах со сферическим дном в условиях больших скоростей перемещения и при наличии отражающих перегородок [18].





*свых*



*сн*

*Рис. 1.10 - Зависимость  при импульсном воздействии.*

Модели с распределенными параметрами характеризуются тем, что переменные процесса могут изменяться как во времени, так и в пространстве, а также могут изменяться только в пространстве. Их математическое описание включает обычно дифференциальные уравнения в частных производных, либо обыкновенные дифференциальные уравнения в случае стационарных процессов с одной пространственной переменной. Примером процесса, описываемого такими моделями, служит трубчатый аппарат с большим отношением длины к диаметру () и значительной скоростью движения реагентов (рис. 1.11).

Модель идеального смешения соответствует аппарату, в котором поступающее в него вещество мгновенно распределяется по всему объему аппарата (рис. 1.12). Концентрация вещества в любой точке аппарата равна концентрации вещества на выходе из него.

d

Исходное вещество (реагент)

*l*

продукт

*Рис. 1.11 – Схема трубчатого аппарата*

Зависимость концентрации вещества в потоке жидкости на входе в аппарате идеального смешения и выходе из него  имеет вид:

 (1.19)

где - концентрация вещества на входе; -концентрация вещества на выходе; *V* - объем аппарата; - объемный расход потока через аппарат.

∞





v

v

V

*Рис.1.12 - Аппарат идеального смешения*

Стационарное состояние является основным рабочим режимом непрерывных технологических процессов.

Речь может идти о стационарных состояниях или режимах функционирования какой-либо системы, которая в каждый момент под действием внешних воздействий может выйти из этого состояния.

Существует два класса исследования стационарных состояний:

1. Задача анализа – определение неизвестных режимных переменных системы, при которых достигается заданное стационарное состояние;
2. Задача оптимального синтеза – выбор оптимального стационарного состояния среди множества возможных.

Таким образом, видим, что первая задача – это составная часть второй. Решением первой задачи является конечный набор числовых значений.

Основа моделей стационарных режимов – уравнение материального и энергетического баланса в системе. Всегда входной поток материи равен выходному потоку, накопления не происходит [7].

Если на входе ступенчатый входной сигнал, то выходной сигнал повторяет входной со сдвигом (запаздыванием) по времени на величину среднего времени пребывание в аппарате (рис. 1.13):

*t*







*0*

*t*

*Рис. 1.13 - Зависимость  при ступенчатом воздействии.*

В случае импульсного входного сигнала функция отклика представлена на рис. 1.14.

Передаточная функция для аппарата идеального вытеснения имеет вид:

, (1.20)

где  - время транспортного запаздывания, это – звено чистого запаздывания.

Еще раз отметим, что модели идеального вытеснения соответствуют процессы, протекающие в трубчатых аппаратах при большом отношении длины трубы к диаметру.





*t*



*Рис. 1.14 - Зависимость  при ступенчатом воздействии*

К статическим относят модели инвариантные относительно времени. Они служат для описания процессов и явлений, независящих от времени. Соответствующее математическое описание в статических моделях не включает время как переменную и состоит из алгебраических уравнений, либо дифференциальных уравнений, в случае объектов с распределенными параметрами. Примером объекта, описываемого статической моделью, служит аппарат полного смешения объемом *V* в установившемся режиме работы, в который непрерывно подаются реагенты *А* и *В* в количестве  и  и отводится продукт реакции *Р*. Причем +=(  и  - объемные расходы реагентов *А* и *В* соответственно)

Для математического описания аппарата применим уравнения материального баланса:

 (1.21)

где *k* – константа скорости реакции.

Динамические модели отображают изменение объекта во времени. Математическое описание таких объектов включает производную по времени. Часто динамическую модель объекта строят в виде передаточных функций.

Рассмотрим модель идеального вытеснения, в основе такой модели лежит допущение о поршневом течении без перемешивания вдоль потока при равномерном распределении вещества в направлении, перпендикулярном движению (рис. 1.15). Время пребывания всех частиц в системе одинаково и равно отношению объема системы к объемному расходу жидкости.

Такой поток, например, имеет место в трубчатом аппарате при турбулентном режиме течения жидкости через него [7].

Математическое описание модели идеального вытеснения имеет вид:

 , (1.22)

где *t* – время, с; *х* – координата, вдоль которой перемещается вещество; *ω*- линейная скорость перемещения вещества (потока), м/с.









*v*- объемный расход потока через аппарат

*Рис. 1.15 – Схема к модели идеального вытеснения*

Для решения дифференциального уравнения в частных производных примем начальное условие: в начальный момент времени по всей длине аппарата начальная концентрация была равна некоторому значению , то есть:

*с(0,х)=сн(х)*, при *t=0, 0<x≤l.* (1.23)

Примем граничное условие: в аппарате в любой момент времени входная концентрация есть некоторая функция от времени, т.е.:

, при *х=0, t>0*. (1.24)

Тогда решение уравнения (1.22) имеет вид:

 (1.25)

Из решения (1.25) следует, что любое изменение концентрации на входе в аппарате идеального вытеснения появляется на его выходе через время, равное среднем времени пребывания , где *l* - длина аппарата.

Рассмотрим два основных входных сигнала: ступенчатый и импульсный.

Примером динамической модели может служить модель рассмотренного выше аппарата полного смещения, но работающего в неустановившемся режиме. В этом случае математическое описание аппарата включат в следующие уравнения материального баланса:

 (1.26)

А так же начальные условия , , при *t=0*.

Типовыми моделями структуры потоков в технологических аппаратах являются модель идеального смешения и модель идеального вытеснения.

Рассмотрим однопараметрическую диффузионную модель (рис. 1.16).

За основу возьмем модель идеального вытеснения (1.22), но при наличии обратного перемешивания, подчиняющегося формальному закону диффузии [3].

В качестве параметра модели служит коэффициент турбулентной диффузии (коэффициент продольного перемешивания)  (м2/с), который определяется опытным путем.

При составлении модели приняты следующие допущения: изменение концентрации вещества является непрерывной функцией координаты; концентрация вещества в данном сечении постоянна; объемная скорость потока и коэффициент продольного перемешивания не изменяются по длине и сечению потока.







*v – объемный расход потока через аппарат*

*w – линейная скорость потока*

*Рис. 1.16 – Схема к диффузионной модели*

При таких допущениях модель запишем, основываясь на законе сохранения массы:

накопление = приход вещества - расход вещества

 (1.27)

Уравнение (1.25) является основным уравнением диффузионной модели.

Начальное условие:  при *t=0* – профиль концентрации в начальный момент времени определен и равен .

Граничные условия задаются из условия материального баланса на концах аппарата. Рассмотрим схемы потоков у левого и правого края аппарата (рис. 1.17 а,б).

Общее правило: сумма потоков вещества, походящих к границе должна быть равна сумме потоков вещества отходящего от границы, тогда получаем:

















а) б)

*Рис. 1.17 – Схемы потоков у левого и правого края аппарата*

 (1.26)

Для первого края обычно принимают , тогда получаем, что:

. (1.27)

Такие условия называются - граничные условия по Данквертсу.

В случае, когда на входе диффузионной модели ступенчатая функция, график представлен на рис. 1.18.











*Рис. 1.18 – График функции отклика при ступенчатой входной функции*

Для случая импульсной функции на входе аппарата функция отклика представлена на рисунке 1.19.











*Рис. 1.19 – График функции отклика при импульсной входной функции*

Передаточная функция достаточно сложная, она не выражает ни одним из типовых звеньев.

Рассмотрим двухпараметрическую диффузионную модель. В этой модели учитывается перемешивание потока в продольном и радиальном направлениях (рис. 1.18). Таким образом, двухпараметрическая модель характеризуется двумя параметрами: коэффициентом продольного  и радиального  перемешивания. При этом принимается, что величины  и  не изменяются по длине и сечению аппарата, а линейная скорость *w=v/s* постоянна, где *v-* объемный расход потока через аппарат, м3/ч.

.







*Dl*

*Рис. 1.20 – Схема движения потоков к двухпараметрической диффузионной модели*

Для случая одномерного движения потока в аппарате цилиндрической формы с постоянной по длине и сечению скоростью *ω* уравнение двухпараметрической диффузионной модели имеет вид [5, 6]:

. (1.28)



Начальное условие: *с(o,x,r)=0* при *t=0.*

Граничные условия:

- исходя из геометрии для центра аппарата: *r=0, c(t,0,0)=с0 δ(0)* при *х=0;*



- для слоёв возле стенок аппарата:  при *r=R*;



- для левого края аппарата:  *при х=0;*

для правого края аппарата:  при *x=l*.

При опытном определении величин коэффициентов продольного *Dl* и радиального *D2* перемешивания их обычно представляют в виде безразмерных критериев Пекле:  и .



Двухпараметрическая диффузионная модель используется для описания движения потоков в аппаратах колонного типа с небольшим отношением длины к диаметру, и большой поперечной неравномерностью скоростей потоков. Ввиду сложности решения такая модель используется значительно реже однопараметрической [8].

Рассмотрим ячеечную модель. Впервые рассматриваемая модель была предложена для каскада реакторов с мешалками. В этом случае аппарат состоит из ряда последовательно соединенных ячеек, через которые проходит поток вещества: v-расход вещества через аппарат, причём для простоты примем, что .



∞

*v,свых*

*v1*

*сi-1*

∞

*v2*

*сi-2*

*v,свх*

∞

*vN-1*

∞

*vN*



…

*Рис. 1.21 – Схема ячеечной модели*

Примем следующие допущения:

1) в каждой ячейке осуществляется идеальное перемешивание;

2) между ячейками отсутствует обратное перемешивание.

Параметрами ячеечной модели, количественно характеризующими продольное перемешивание, служит число ячеек полного перемешивания *N*. С увеличением *N* структура потока приближается к модели полного вытеснения, а с уменьшением *N*- к модели идеального смещения.

Запишем уравнение сохранения массы для каждой из ячеек:

;

;

…………………… (1.29)

;

………………………

.

Разделим левые и правые части (1.29) на *v*:

;

;

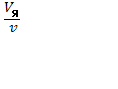
………………… (1.30)

;

………………………

;

где  – среднее время пребывания частиц потока в каждой ячейке.



Соответствующие начальные условия имеют вид: , при *t=0*.



Cистема из *N* линейных дифференциальных уравнений в обыкновенных производных (1.30) вместе с начальными условиями образуют ячеечную модель структуры потока.

Рассмотрим отклики ячеечной модели на два стандартных возмущения (таблица 1.4).

Если рассматривать передаточные функции объектов, описываемых ячеечной моделью, то тогда число ячеек *N=1*, то передаточная функция имеет вид , что соответствует передаточной функции модели идеального смешения в модель их смещения. Когда число ячеек , то передаточная функция , где - среднее время пребывания в объекте описываемая ячеечной моделью – звено чистого запаздывания соответственной модели идеального вытеснения.



Данная модель применяется при описании процессов, происходящих в группе последовательно соединенных аппаратов с мешалками, а так же для описания процессов массообмена в обсорбционных и экстракционных колоннах.

Таблица 1.4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Ступенчатое возмущение со скачкообразным уменьшением концентрации до 0 (метод вымывания)  c(t)  t  t  1  4  свх(t)  c(t)  свх(t)  2  1  2  3  4  5  3      1-идеальное смещение при числе ячеек *n2, n3, n4*, причём *n2 < n3<n4*  5-идеальное вытеснение | 2. Импульное возмущение | 3. Ступенчатое возмущение со скачкообразным возрастанием концентрации рационально                1,2,3-идеальное вытеснение при числе ячеек *n2* и *n3*, *n2 < n3*  4- идеальное смещение |

# 1.11 Ячеечная модель с обратными потоками

# (рециркуляционная)

Ячеечная модель не всегда обеспечивает адекватное воспроизведение структуры потоков в реальном аппарате. В связи с этим разработаны модификации такой модели. Наиболее распространенной модификацией является ячеечная модель с обратными потоками. Согласно этой модели аппарат рассматривают как последовательность зон с сосредоточенными параметрами, каждая из которых эквивалентна ячейке идеального перемешивания. Далее предполагают, что между ячейками существуют обратные потоки (рис. 1.22).

∞

VЯ

*v+l*

∞

VЯ

*v,свх*

*cn*

∞

VЯ

*v+l*

*v+l*

*с3,*

*e, c4*

∞

VЯ

*v+l*

*сn-1,*

*e, cn*

*2*

*3*

1

*n*

*v,свых*

*с2,*

*e, c3*

*с1,*

*e, c2*

*Рис. 1.22 – Схема ячеечной модели с обратными потоками*

*v*- поток вещества по аппарату; *e* - обратный поток вещества по аппарату; *ci* - коэффициент на выходе i-й ячейки; *Vя*- объём ячейки (предполагается, что ячейки имеют равный объём ).



На основании уравнения сохранения вещества и с учетом обратных (рециркуляционных) потоков между ячейками запишем уравнение изменения концентрации для каждой ячейки:

 (1.31)

При этом выполняются следующие начальные условия:  при *t=0*. Разделим левые и правые части (1.31) на *v*, тогда отношение *e/v*- называется долей обратного потока и обозначается как *f=e/v*; отношение *Vя/v* определяет среднее время пребывания потока в ячейке, т.е. . С учетом введенных обозначений система (1.31) примет вид:



 (1.32)



при начальных условиях:

.

Система уравнений (1.31) с начальными условиями представляет собой математическое описание ячеечной модели с обратными потоками.

При  (т.е. когда *е* - обратный поток между ячейками достаточно мал) - ячеечная модель с обратными потоками переходит в ячеечную модель, при  и  переходит в диффузионную модель [19].

Таблица 1.5 - Ориентировочные области применения различных

моделей структуры потоков в аппарате.

|  |  |
| --- | --- |
| Наименование модели | Области применения |
| 1 | 2 |
| 1. Модель идеального перемешивания | Цилиндрические аппараты с сферическим дном в условиях интенсивного перемешивания с отражательными перегородками; барбатажные аппараты с близкими размерами диаметра и высоты в условиях интенсивного барбатажа; |
| 2. Модель идеального вытеснения | Трубчатые аппараты с отношением длины к диаметру свыше 50; |
| 1 | 2 |
| 3. Диффузионная модель | Трубчатые аппараты; аппараты колонного типа с насадками и без насадки при осевом рассеивании вещества; |
| 4. Ячеечная модель | Каскады реакторов с мешалками; тарельчатые колонны; аппараты с псевдоожиженными слоями; насадочные колонны; |
| 5. Рециркуляционная модель (или ячеечная модель с обратными потоками) | Тарельчатые, секционированные насадочные аппараты, где наблюдается заброс вещества в сторону, противоположную направлению основного потока(например, пульсационные колонные аппараты). |

# 1.12 Комбинированные модели

Для описания некоторых реальных процессов рассмотренные выше модели применить не представляется возможным. Это относится, в частности, к аппаратам, имеющим байпасные и циркуляционные потоки или застойные зоны. В этих случаях, используют комбинированные модели [16].

Застойные зоны бывают двух видов: застойные зоны без обмена с основными потоками ''мёртвые'' зоны и зоны с обменом между ними и основным потоком. При наличии застойных зон возникает задача определения объёма застойной зоны; а при наличии обмена между застойной зоной и основным потоком ещё “мёртвой”; и эффективности обмена между проточной и застойной зонами. Объём ''мёртвой'' застойной зоны определяется из соотношения:

, (1.33)

где ; *Va, Vзз*- объём всего аппарата и застойной зоны; *v*- обьёмный расход потока; - cреднее время пребывания, определённое индикаторным методом .



Уравнение моделей в случае наличия застойных зон определяется для каждого типового процесса индивидуально.

Байпас – это обводной канал, причем направление движения потока совпадает с направление движения основного потока.

На практике могут наблюдаться два вида байпасирования (рис. 1.23):

V

q=δ(t)

c(t)

*v*

v2,c2

*v*

c

a)

V

q=δ(t)

c(t)

*v2*

*v*1

б)

*Рис. 1.23 – Схемы* байпасирования

На рис. 1.23а представлен случай, когда индикатор не попадает в байпас:

*v*= *v1+ v2*, (1.33)

где *v1* - поток по байпасному каналу, а  *v2* - поток через аппарат.

Уравнение баланса индикатора на выходе потока из аппарата:

*vc= v2с2+ v1с1* (1.34)

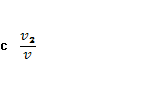


Концентрация индикатора в потоке, выделяется из смесителя до смешивания с байпасированным потоком [12]:

. (1.35)

Концентрация индикатора в потоке *с1=0*, то подставив (1.35) в (1.34), получим:

, (1.36)



откуда:

. (1.37)

На рис. 1.23б представлен случай, когда индикатор попадает в байпас: в этом случае часть индикатора, минуя аппарат, попадает на выход потока, т.е. в потоке  *v1* окажется часть индикатора  *v1*/*v,* а в потоке  *v2* - часть *v2*/*v*. Аналогично изложенному выше (10), можно записать, что концентрация после аппарата:

, (1.38)

где *с0*΄- действительная концентрация индикатора в аппарате в момент *t=0* определённая из расчёта, что в аппарат попадает только часть индикатора *v2/v*.

Из условия баланса имеем:

, (1.39)



где *с0*- концентрация индикатора, рассчитанная в предположении, что весь индикатор попал в смеситель.



Подставим (1.39) в (1.38) и получим:

. (1.40)

При наличии байпасирования необходимо рассматривать изменения концентрации с учетом уравнений материального баланса.

Рецикл - возврат части продукта на повторную обработку. Возможны два варианта рециклов (рис. 1.24), т.е. в линии рециклов моет быть один из типовых аппаратов.

Порядок рассмотрения такой же, как при случае байпасирования, т.е. сначала записываем уравнение материального баланса, а затем рассматриваем, как изменяются концентрации.

Для случая а) уравнение баланса имеет вид:

; (1.41)

*cвх*

*v*

V1

с2,

VR

v, cвх, S,c΄

V2

V

VR

*c*

*v*

S,c΄

*v*

cвх

а) б)

*Рис. 1.24 – Варианты рециклов*

для случая б):

. (1.42)

# 1.13 Комбинированные модели, составления из параллельно соединённых зон

На основе материального баланса для точки *z* (рис. 1.25):

 (1.43)

*;* (1.44)

т.е. *с=f(c1,c2);*

. (1.45)

свх

ν

ν1, свх

с

ν1, с1

ν2, с2

ν2, свх

β

(1-β)

z

*Рис. 1.25 – Схема к комбинированной модели*

Разделим правую и левую части уравнения на *v,* приведём задачу к безразличному виду:

, (1.46)



разделим на *с0* и внесём *v* под знак :

, (1.47)

разделим на *l* и внесем *l* под знак :

. (1.48)

Обозначим:

; ; . (1.49)

где *z* - безразмерная координата длины; *с* – безразмерная координата концентрации; *Ө* – безразмерная координата времени,

откуда:

. (1.50)

 (1.51)

. (1.52)

Заменим частные дифференциалы левыми конечными разностями относительно  [9]:



; (1.53)



; (1.54)

разделим на :

;(1.55)

; (1.56)

 (1.57)

При этом начальные и граничные условия имеют следующий вид:

 (1.60)

*граничные условия*

*j=0; i=0, n*

*начальное условие*

*j=0; j=0, m*

# 2. Модели оптимизации. Линейное программирование

Основное назначение любой математической модели - помочь получить новые знания об объекте исследования. Одна из самых главных целей информации об объекте - определение оптимальных условий функционирования исследуемого объекта. Модели оптимизации специально посвящены решению этой задачи [11, 29, 30].

Любой объект исследования можно представить (рис. 2.1), где *х1, …хn* - входные параметры; *y1, …yk* - выходные параметры.

yk

xn

объект

x2

.

.

.

y1

.

.

.



*Рис. 2.1 – Схема объекта исследования*

Среди выходных параметров выделяют несколько наиболее важных, от численных значений которых зависит качество функционирования объекта. Эти параметры называются критерии оптимальности или критерии качества *q*:

 (2.1)

Задача ставится следующим образом: найти такие значения входных параметров (*хп*), при которых критерии оптимальности достигнут оптимального (*min* или *max*) значения, причем вектор входных параметров должен принадлежать некоторому множеству, которое называется множество допустимых решений:

, (2.2)

где *х1, х2,…хn* - должны удовлетворять некоторым ограничениям.

Задачи оптимизации делятся на:

а) скалярную оптимизацию - это наиболее простая задача, когда рассматривается один критерий оптимальности (для решения используют графический метод, а аналитический метод (симплекс-метод);

б) векторную оптимизацию - когда рассматривается несколько критериев оптимизации (для решения используют метод Зейдена, градиентные методы, методы Поррето).

Из задач скалярной оптимизации наиболее простыми являются задачи линейного программирования (ЛП), в которых критерий оптимальности - это линейная функция входных параметров, а область допустимых решений задана системой линейных равенств [25].

Модель задачи ЛП формализуется следующим образом:

 (2.3)



Функцию  называют целевой.

Более компактно модель (1) может быть записана в матричной форме следующим образом:

 (2.4)

где - матрица размером *m<n;*

- вектор правых частей ограничения;

 - входных параметров;



 - вектор коэффициента целевой функции.

# 2.1 Геометрическая интерпретация модели

Область допустимых решений *D* в задаче ЛП образуется путём пересечения *m* полупространств, каждая из которых определяется соответственно. Линейным неравенством (ограничением) модели из области *D*:

;  (2.5)

Пересечением указанных полупространств является выпуклый прямоугольник.

При этом множество значений *х*, удовлетворяющих неравенствам (ограничениям) модели, может быть: пустым (рис.2.2а), ограниченным (рис. 2.2б), неограниченным (рис.2.2в).

В первом случае задача не имеет решения, т.к. система линейных неравенств противоречива.

Рассмотрим целевую функцию:

 (2.6)

пусть =*const*, тогда:

 (2.7)

x2

x2

x2

x2

x1

x1

x1

x1

а) б) в) г)

*Рис. 2.2*

Изобразив геометрически целевую функцию, получим плоскость, в пределах которой значения функции будут одинаковы и равны заданной *const*.

Следует помнить, что её нормальный вектор будет указывать  направление улучшения линейной функции .

Будем перемещать плоскость =*const,* чтобы она оставалась перпендикулярна вектору . При этом возможны следующие случаи:



а) плоскость =*const* и область *D* будут иметь лишь одну общую точку - вершину многогранника, определяющую единственное решение модели ЛП;

б) плоскость *=const* и область *D* имеют целое множество общих точек - плоскость целевой функции совпадает с ребром или гранью многогранника (в случае их параллельности плоскости), определяющие бесчисленное множество решений.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- решение задачи ЛП, если оно существует, не может лежать внутри области допустимых решений *D*, а только на её грани;

- решение задачи ЛП, минимизирующее функцию  (оптимальное решение), всегда достигается в одной из вершин многогранника допустимых решений (если оно достигается на целой границе или ребре, то оно же достигается и в каждой из вершин, через которые проходит эта грань или ребро).

- для того, чтобы найти оптимальное решение, достаточно сделать перебор всех вершин многогранника и выбрать из них ту, в которой функция достигает своего минимума.

# 2.2 Пример решения задачи скалярной оптимизации графическим методом

Постановка задачи: Найти минимум функции двух переменных, поиск решения на области допустимых решений *D*, которая образована следующими неравенствами [23]:……..

**** (2.8)

Критерий оптимизации: .

Строим систему координат *x10x2*.

Так как из условия (2.8) *х1≥0* и *х2≥0*, то область *D* принадлежит первому квадранту.



Первый этап графического решения - изображение на плоскости области *D*.

Рассмотрим последовательно все условия (табл. 1.6).

Выбираем другое значение *q*, но с учётом того, что целевая функция стремится к минимуму (т.е. выберем значение меньше, чем было изначально).

Пусть *q=0* , т.е. строим линию, это линия уровня при *q=0*:

 (2.8)

 (2.9)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *х1* | 0 | 1 |
| *х2* | 0 | 2 |

Таблица 1.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Условие 1     |  |  |  | | --- | --- | --- | | *х1* | 0 | 1 | | *х2* | 1 | 0 |   *D1*-множество точек (*x1, x2*), удовлетворяющих данному ограничению. Для этого всю плоскость *x10x2* разбиваем на множество точек принадлежащих *D1* и не принадлежит  *D1* т.е. когда условие 1 выполняется (принадлежит  *D1*) и не выполняется (не принадлежит  *D1*). Строим границу области *D1,*и x1+x2= 1  Берём любую точку с координатами (1;1)  *x1+x2≤ 1*  *2 ≤ 1 л.* | Условие 2       |  |  |  | | --- | --- | --- | | *х1* | 0 | 1 | | *х2* | 1/4 | 05/4 |   Возьмём точку с координатами (1;1)  -4+4≥ 1  0≥ 1 л.  вверх от (2)  При рассмотрении условия (2) получили область *D2,* штрихуем. | Условие 3    получаем прямую параллельную оси  Возьмём точку с координатами (1;1)  4·1≤ 3  4 ≤ 3 (л.)  Вниз от (3)  При рассмотрении условия (3) получили область *D3,* штрихуем. |

Построены две линии уровня, причем они параллельны между собой. При переходе от линии *q=2* к линии *q=0* целевая функция уменьшается и т.к. надо найти минимум, то, следовательно, она улучшается, т.е. при перемещении линии уровня в направлении, указанном стрелками - целевая функция – улучшается, а это направление и есть направление вектора градиента.

Для решения задачи ЛП надо найти такую точку, чтобы она лежала в области *D* (прямоугольника *ABCD*) и при этом через неё проходила линия уровня с минимальным значением *q*. Очевидно, что построенная линия *q=0*, не является оптимальной, этим свойством будет обладать линия, проходящая через точку *D*.

Аналитически определить координаты точки *D* можно, решив совместно два уравнения для условия (2.8) и условия (2.9).

 (2.10)



Таким образом, точка *D* имеет координаты (0,375; 0,625) и принадлежит исследуемой области *D*.



Линия равного уровня, проходящая через эту точку:

- это есть минимальное значение целевой функции.

Таким образом, чтобы графически решить задачу ЛП надо:

1. построить область *D*;
2. построить линии равного уровня целевой функции (достаточно двух линий) и определить, в какую сторону надо их перемещать, чтобы функция улучшилась;
3. найти крайнюю точку выпуклого многоугольника области *D*, через которую проходит линия наилучшего уровня.

Иногда линии уровня параллельны какой-нибудь линии ограничения. Тогда оптимальным решением будет не единственное значение, а целый отрезок.



Пример:

**** (2.11)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *х1* | 0 | 1 |
| *х2* | 2 | +1 |

х2

х1

(2)

А

В

0

х2

х1

(2)

А

В

0

Е

С

q=0

q=2

(1)

(3)

1

Координаты:

т.А (0;0,25)

т.В (0;0,75)

т.С (0,75;0,75)

т.E (0,375;0,625)

*Рис. 2.3 – К решению задачи ЛП*

Таким образом, область *D* - выпуклый четырёхугольник *ABCD* получили как пересечение подобластей *D*1∩ *D*2∩ *D*3 (рис. 2.3).



Если в условии, которое образует область *D*, стоит только знак равно, то множество точек, удовлетворяющее ему, не область, лежащая выше или ниже прямой, а сама прямая.

Например: пусть область *D* задана неравенствами:

**** (2.12)

Строим область *D*, рассматривая каждое неравенство в отдельности.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| условие 1 | условие 2 | условие 3 |
| |  |  |  | | --- | --- | --- | | *х1* | *0* | *2* | | *х2* | *2* | *0* | | Биссектриса I и III квадрантов, точки лежат на самой прямой. | Это I квадрант плоскости *х10х2.* |

х2

(2)

2

х1

2

0

*Рис. 2.4*

В итоге область *D* это отрезок на прямой *x1=x2* из условия (2) внутри области *D1*.



Второй этап- изображение целевой функции.

Целевая функция - это функция, для которой в задаче надо найти максимум или минимум. Если она зависит от двух переменных *х1* и *х2*, то её изображение на плоскости есть линии равного уровня, т.е. таких линий, в каждой точке которых функция имеет, одинаковое значение.



Способ рассмотрения линий равного уровня рассмотрим на примере *q= х2-2х1*.



Зафиксируем любое значение *q*, например *q=2*.

. Это прямая, строим её на плоскости:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *х1* | *0* | *-1* |
| *х2* | *2* | *0* |

и подписываем *q=2* это линия уровня, где *q=2*.



# 2.3 Симплекс- метод решения задачи линейного

# программирования

Симплекс-метод - это численный способ решения задачи линейного программирования. Он основан на следующих высказываниях:

1. Область *D* допустимых решений задачи ЛП представляет собой выпуклый многогранник в пространстве переменных *х1, х2,…,xn*;
2. Оптимальное значение целевой функции достигается в одной из угловых точек этого многогранника.

Основная идея метода- перебор угловых точек и выбор лучшей, т.е. той, где целевая функция максимальна или минимальна. Поскольку число угловых точек не бесконечны, то решение симплекс-метода можно получить за конечное число шагов [14].

Ранее мы рассматривали решение задачи ЛП графически. Мы построили на плоскости *х10х2* область допустимых решений *D* - это получился прямоугольник *ABCЕ* и преобразили линии равного уровня – это графические изображения целевой функции.

Критерии оптимизации: .

Область допустимых решений:

**** (2.13)

Из графического решения имеем координаты вершин выпуклого многоугольника: т. А (0;0,25), т.В (0;0,75), т.С (0,25;0,75), т.Е (0,375;0,625).

Решением была т.E и значение целевой функции в ней   
*q= -0,125*.



Рассмотрим симплекс-метод на примере этой задачи. Последние два условия рассматривать не будем. Приводим задачу к канонической форме, для этого добавляем к левой части вспомогательную неотрицательную переменную со знаком “+”, если неравенство типа меньше и со знаком “-”, если - “больше или равно”:

 (2.14)

 (2.15)

 (2.16)

 (2.17)

Второй этап - составление симплекс-таблиц.

Для этого разбиваем переменные на множества:



1. базисные переменные – их число равно числу ограничений (равно 3);
2. небазисные – все остальные (их будет 5-3=2).

Выразим базисные переменные через небазисные. Следует помнить, что способ разбиения множеств переменных на базисные и небазисные может быть любым, надо только чтобы свободные члены в выражениях *q* базисных переменных были неотрицательны, т.е.:

. (2.18)



При ручном варианте симплекс-метода разделение делается методом проб и ошибок – сначала попробуем найти выражение, потом смотрим, выполняется ли условие (2.18) и делаем вывод, какие переменные взять в базис.

Из (2.16) выразим *х2* и подставим в (2.14) и (2.15):

из (2.16)

, (2.19)

подставим выражение в (2.15):

; (2.20)

; (2.21)

выразим

 (2.22)

(2.19) подставим в (2.14):



 (2.23)

(2.19) подставим в целевую функцию:

. (2.24)

Получим первую симплекс-таблицу, т.е. набор выражений базисных переменных (*х2, х3, х4*) через небазисные (*х1, х5*):



 (2.25)

 (2.26)

 (2.27)

 (2.28)

Условие (2.18) выполняется, следовательно, данное разбиение допустимо.

Если положить небазисные переменные равными нулю и вычислить значение базисных, то получим базисную точку:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х1* | *х2* | *х3* | *х4* | *х5* | *q* |
| 0 | 3/4 | 1/4 | 2 | 0 | 3/4 |



На графике (рис. 2.3) точка с координатами (0;0,75) – это точка *B*- угловая. Можно доказать, что базисная точка всегда является угловой.



Следует помнить, что базисная точка определяется способом разбиения переменных на базисные и небазисные (т.е. если *х2, х3, х4* - базисные, то получим точку *B*). Поэтому, чтобы перейти в другую базисную точку и найти в ней целевую функцию надо по-другому разбить переменные на подмножества.



В симплекс-методе переход к новой базисной (к новому разбиению) делается так: выбирается небазисная переменная и переводится в базис (делается базисной). Чтобы количество базисных переменных не изменилось, какая-то базисная переменная выводится из базиса. Так сделано, чтобы упростить перебор базисных точек (т.е. не все сразу переменные меняются местами, а по одной).

Третий этап - перебор базисных точек.

Чтобы не перебирать точки вслепую, надо следующей точкой выбрать такую, чтобы целевая функция улучшилась, т.е. перебор должен быть направленным.

В новой базисной точке базисной переменной может быть  *х1* или *х5*, сейчас *х1= х5=0*. Если какую-то из них сделать базисной, то она будет положительной. Так как коэффициенты в целевой функции у обеих переменных отрицательны, то при их увеличении значение *q* уменьшается.



Правило 1:

а) при поиске минимума целевой функции в базис переводят ту переменную, у которой коэффициент в целевой функции максимален по модулю среди отрицательных;

б) при поиске максимума целевой функции – в базис переводят ту переменную, у которой в целевой функции максимальный положительный коэффициент.

Итак делаем базисной  *х1*. Для этого надо выразить её из какого-нибудь уравнения (2.25)–(2.27) и подставить в остальные уравнения целевой функции. Попробуем выразить *х1* из (2.26):



. (2.29)

Свободный член 1/2> 0, что допустимо. Подставим в (2.25):



. (2.30)

Свободный член -1/4 < 0 , отрицательный, такое разбиение недопустимо. Пробуем другой вариант.



Выразим  *х1* из (2.25):



. (2.31)

Выражение (2.31) подставим в (2.26):

;

;

. (2.32)

Условие (2.27) остаётся без изменения.

Подставим (2.31) в целевую функцию:

 (2.33)

получим вторую симплекс-таблицу:

 (2.35)

 (2.36)

; (2.37)

 (2.38)

Условие (2.18) выполняется.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х1* | *х2* | *х3* | *х4* | *х5* | *q* |
| 1/4 | 3/4 | 0 | 1 | 0 | 1/4 |

Вторая базисная точка.



В выражении целевой функции переменная *х5* имеет отрицательный коэффициент, теперь ее переводим в базис. Выразим  *х5* из (2.32):



;

. (2.39)

Подставим (2.39) в выражение (2.35):



 (2.40)

Подставим (2.39) в выражение (2.37):



 (2.41)

Подставим (2.39) в целевую функцию (2.38):

;

;

. (2.42)

Получим симплекс-таблицу, включающую выражения (2.39)-(2.42).

Условие (2.18) выполняется.

Новая базисная точка:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х1* | *х2* | *х3* | *х4* | *х5* | *q* |
| 3/8 | 5/8 | 0 | 0 | 1/2 | -1/8 |

На графике это точка *Е* с координатами ( 3/8; 5/8).



Есть ли лучшая базисная точка? Все коэффициенты в целевой функции положительны, следовательно, никаким новым выборам базисной переменной *q* (целевой функции) нельзя уменьшить, таким образом, найдена оптимальная точка [10].

Правило 2. Критерии окончания поиска решения:

а) если при поиске минимума целевой функции коэффициенты при всех переменных целевой функции положительны, то найдена оптимальная точка.

б) если при поиске максимума целевой функции коэффициенты при всех переменных отрицательны, то найдена оптимальная точка.

# 3. Экспериментально-статистичесикие модели

# 3.1 Математическое описание

Под математическим описанием процесса будем понимать систему уравнений, связывающих функции отклика с влияющими факторами. В простейшем случае это может быть одно уравнение. Часто математическое описание называют *математической моделью.*

С помощью математических методов оптимального планирования эксперимента можно получить математическую модель процесса даже при отсутствии сведений о его механизме. Это в ряде случаев бывает очень полезно.

Ценность математического описания заключается в том, что оно:

-дает информацию о влиянии факторов;

- позволяет количественно определить значения функций отклика при заданном режиме ведения процесса;

- может служить основой для оптимизации.

Следует отметить, что на основе методов планирования эксперимента можно количественно описать также свойства таких продуктов, как сплавы, пластмассы, резины, керамика, ситаллы, бетоны и т. п.

Математические модели, получаемые с помощью методов планирования эксперимента, принято называть *экспериментально-статистическими.*

# 3.2. Полный факторный эксперимент

Метод полного факторногоэксперимента дает возможность получить математическое описание исследуемого процесса в некоторой локальнойобласти факторного пространства, лежащей в окрестности выбранной точки скоординатами *(x01, х02,…, x0n)* [1, 2]*.*

Итак, с помощью полного факторного эксперимента ищут математическое описание процесса в виде уравнения:

*y=b0+b1x1+b2x2+…bnxn+b12x12+ b(n-1)nx(n-1)xn* (3.1)

Его называют уравнением регрессии*,* а входящие в него коэффициенты - коэффициентами регрессии*.*

Для удобства вычислений коэффициентов регрессии все факторы в ходе полного факторного эксперимента варьируют на двух уровнях, соответствующих значениям кодированных переменных -1 и +1.

Таким образом, полным факторным экспериментом называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов.

В табл. 3.1 приведены условия опытов полного двухфакторного эксперимента. Часть таблицы, обведенная пунктиром, называется матрицей планирования*.*

Таблица 3.1 - Полный двухфакторный эксперимент

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер опыта | Факторы | Функция отклика |
| 1 | -1 | *y1* |
| 2 | +1 | *y2* |
| 3 | -1 | *y3* |
| 4 | +1 | *y4* |

В табл. 3.2 приведены условия опытов полного трехфакторного эксперимента. Эти опыты соответствуют в факторном пространстве вершинам куба с центром в начале координат.

Таблица 3.2 - Полный трехфакторный эксперимент

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта | Факторы | | | Функция отклика |
| x1 | x1 | x1 |
| 1 | -1 | -1 | -1 | y1 |
| 2 | +1 | -1 | -1 | y2 |
| 3 | -1 | +1 | -1 | y3 |
| 4 | +1 | +1 | -1 | y4 |
| 5 | -1 | -1 | +1 | y5 |
| 6 | +1 | -1 | +1 | y6 |
| 7 | -1 | +1 | +1 | y7 |
| 8 | +1 | +1 | +1 | y8 |

Из табл. 3.1 и 3.2 видны основные принципы построения матриц планирования полного факторного эксперимента;

- уровни варьирования первого фактора чередуются от опыта к опыту;

- частота смены уровней варьирования каждого последующего фактора вдвое меньше, чем у предыдущего.

Матрица планирования полного факторного эксперимента является ортогональной. Это свойство позволяет вычислять коэффициенты регрессии по простым формулам независимо друг от друга [27].

Общее количество опытов в матрице планирования:

*N=2n,* (3.2)

где *п* — число факторов.

На основании полного факторного эксперимента вычисляют коэффициенты регрессии, пользуясь следующими формулами:

*;* (3.3)

*;* (3.4)

*,* (3.5)

где *l≠m.*

Некоторые из коэффициентов регрессии могут оказаться пренебрежимо малыми - *незначимыми.* Чтобы установить, значим коэффициент или нет, необходимо, прежде всего, вычислить оценку дисперсии, с которой он определяется:

 (3.6)

Следует отметить, что с помощью полного факторного эксперимента все коэффициенты определяются с одинаковойпогрешностью.

Принято считать, что коэффициент регрессии значим, если выполнено условие:

*b>sbt* (3.7)

где *t* — значение критерия Стьюдента*.*

В противном случае коэффициент регрессии незначим, и соответствующий член можно исключить из уравнения.

Получив уравнение регрессии, следует проверить его адекватность, т. е. способность достаточно хорошо описывать поверхность отклика. Эту проверку осуществляют с помощью критерия Фишера, который представляет собой следующее отношение:

, (3.8)

где *sад —* оценка дисперсии адекватности.

В числителе дроби (3.8) находится большая, а в знаменателе - меньшая из указанных оценок дисперсий.

Оценку дисперсии адекватности вычисляют по формуле

, (3.9)

где *В -* число коэффициентов регрессии искомого уравнения, включая и свободный член; *уjэ, yj*р- экспериментальное и расчетное значение функции отклика в j-м опыте; *N* - число опытов полного факторного эксперимента.

С оценкой дисперсии адекватности связано число степеней свободы:

*fад=N-B.* (3.10)

Уравнение регрессии считается адекватным, если выполняется условие:

*FP≤F,*  (3.11)

где *F* —значение критерия Фишера*.*

# 3.3 Метод дробных реплик

С увеличением количества факторов резко возрастает количество опытов факторного эксперимента. Однако для нахождения коэффициентов регрессии не всегда требуется много опытов. В таких случаях можно уменьшить объём экспериментальных работ, воспользовавшись методом дробных реплик [13, 15].

Рассматриваемый метод заключается в том, что для нахождения описания процесса используется определенная часть полного факторного эксперимента: 1/2, 1/4 и т.д.

Расчёт коэффициентов регрессии, проверка значимости коэффициентов и адекватности описания в данном случае производятся также, как и при полном факторном эксперименте.

Пусть, например, требуется найти коэффициенты уравнения регрессии:

*y=b0+b1x1+b2x2+b3x3.* (3.12)

Если для этой цели воспользоваться трёхфакторным экспериментом, то необходимо провести 8 опытов. Однако эту задачу можно решить и с помощью меньшего количества опытов. Например, возьмём матрицу полного двухфакторного эксперимента и приравняем произведение *х1x2* к фактору *x3.*

Коэффициенты вычислим по формулам:

; (3.13)

; (3.14)

. (3.15)

Таблица 3.3 - Планирование типа 23-1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта | *х1* | *х2* | *х1 х2* | *х3* | Функция отклика |
| 1 | -1 | -1 | +1 | +1 | *у1* |
| 2 | +1 | -1 | -1 | -1 | *у2* |
| 3 | -1 | +1 | -1 | -1 | *у3* |
| 4 | +1 | +1 | +1 | +1 | *у4* |

Столбцы для произведения *х1х2*и фактора *х3*полностью совпадают, поэтому может быть найдена только их сумма:

. (3.16)

Такое планирование называют планированием со смешиванием.

Существует правило, позволяющее определить, какие коэффициенты регрессии определяются совместно при планировании со смешиванием.

Например: методом дробных реплик найдём математическое описание процесса в виде уравнения регрессии:

*y=b0+b1x1+b2x2+b3x3 +b4x4+b5x5.* (3.17)

Воспользуемся планированием типа 25-2 и примем:

*х4=-х1х2;* (3.18)

*х5=х1х2 х3*. (3.19)

Такие равенства в методе дробных реплик называются генерирующими соотношениями.

Правило определения совместных оценок коэффициентов:

1. Примем во внимание, что:



1. Умножив обе части генерирующих соотношений соответственно на *х4* и *х5*, получим:



Эти равенства называются определяющими контрастами. Перемножив их почленно, получим новые определяющие контрасты. В данном случае:

.

1. Составим алгебраическую сумму из единицы и правых частей всех полученных определяющих контрастов:

.

1. Умножив каждый из факторов на *s* и заменив факторы соответствующими коэффициентами разложения в ряд Тейлора, получим:



# 3.4 Метод крутого восхождения

Следует иметь в виду, что качество процесса обычно характеризуется несколькимифункциями отклика. Однако обычно невозможно найти такое сочетание значений влияющих факторов, при котором одновременно достигаются экстремумы всех интересующих экспериментатора функций отклика. Например, максимальная производительность оборудования и минимальная себестоимость продукции обычно достигаются при различных технологических режимах.

Важно отметить, что как влияющие факторы, так и функции-отклика могут изменяться только в определенных пределах. Так, концентрации реагентов не могут быть отрицательными, темпера тура и давление в аппарате не могут превышать безопасных пределов, себестоимость продукции должна быть не выше плановой и т. п. Следовательно, оптимизацию процессов, как правило, осуществляют в условиях ограниченийна влияющие факторы и функции отклика.

Величина, характеризующая уровень оптимизации процесса, называется критерием оптимальности*.* В частном случае критерием оптимальности может быть одна из функций отклика, характеризующих процесс.

Оптимизация процесса представляет собой целенаправленный *поиск* значений влияющих факторов, при которых достигается экстремум критерия оптимальности (с учетом ограничений, наложенных на все влияющие факторы и функции отклика).

Д. Бокс и К. Уилсон предложили использовать для оптимизации результаты полного факторного эксперимента или эксперимента по методу дробных реплик. Сущность такой оптимизации состоит в следующем.

Пусть, например, критерием оптимальности служит функция отклика *у*, представленная в виде (3.17).

Один из влияющих факторов принимают за базовый и для него вычисляют произведение соответствующего коэффициента регрессии на шаг варьирования. Например, для первого фактора это произведение имеет вид *b1∆x*1.

Затем для базового фактора выбирают шаг движения *∆х1\**, с которым будет осуществляться оптимизация, обычно   
*∆х1\*≤* *∆х1.*

После этого вычисляют отношение:

. (3.20)

Для всех остальных факторов шаги движения к оптимальным значениям рассчитывают по формуле:

. (3.21)

Движение к оптимуму начинают из центра плана, который использовался для математического описания функции отклика. Значения факторов на каждом новом шаге находят путём прибавления *∆хi\** к соответствующим предыдущим значениям. Такой метод называется – метод крутого восхождения.

Если же ищется минимум функции *y*, то новые значения факторов находят из предыдущих путём вычитания *∆хi\**. Такой способ оптимизации называют методом наискорейшего спуска.

Движение к оптимуму прекращают, если:

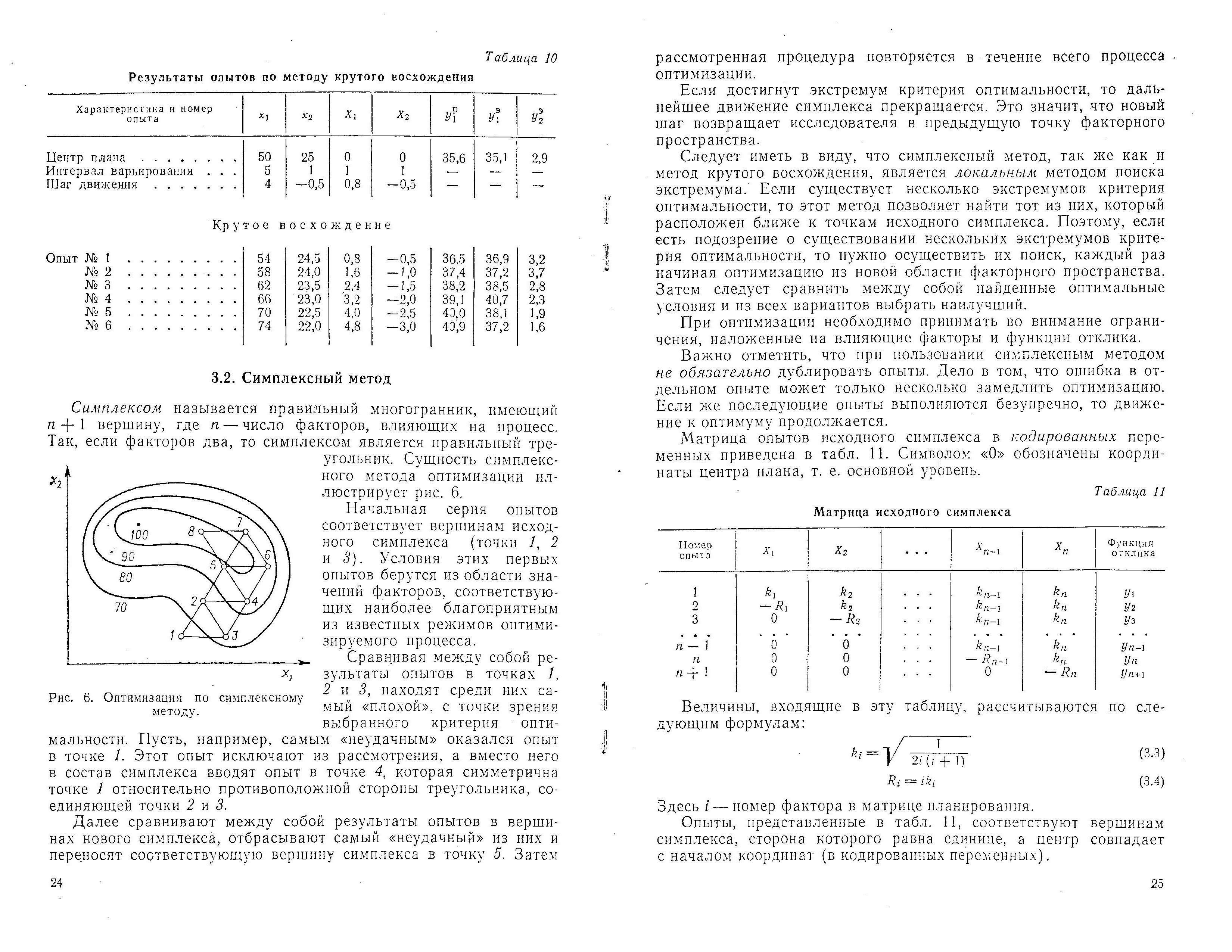
1. Значения одного или нескольких факторов или функций отклика вышли на границы допустимых значений.
2. Достигнут экстремум критерия оптимальности *у*.

В первом случае на этом оптимизация заканчивается, а во втором - в области экстремума функции *у* ищут её новое математическое описание, используя полный факторный эксперимент или метод дробных реплик. Если удаётся получить адекватное описание, используя полный факторный эксперимент или метод дробных реплик. Если удаётся получить адекватное описание этой функции в виде (3.17), то продолжают оптимизацию методом крутого восхождения. Очевидно, оптимум, найденный в результате первого крутого восхождения, был локальным.

Если же в области оптимума не удаётся получить адекватного уравнения регрессии, то переходят к планированию эксперимента для получения математического описания функции *у* в виде многочлена второй степени.

# 3.3 Симплексный метод

Симплексом называется правильный многогранник, имеющий *n+1* вершину, где *n* – число факторов, влияющих на процесс. Так, если факторов два, то симплексом является правильный треугольник. Сущность симплексного метода оптимизации проиллюстрирована на рис.



*Рис. 3.1 – Оптимизация по симплексному методу*

Начальная серия опытов соответствует вершинам исходного симплекса (точки 1,2 и 3). Условия этих первых опытов берутся из области значений факторов, соответствующих наиболее благоприятным из известных режимов оптимизируемого процесса.

Сравнивая между собой результаты опытов в точках 1, 2 и 3, находят среди них самый “плохой”, с точки зрения выбранного критерия оптимальности. Пусть, например, самым “неудачным” оказался опыт в точке 1. Этот опыт исключают из рассмотрения, а вместо него в состав симплекса вводят опыт в точке 4, которая симметрична точке 1 относительно противоположной стороны треугольника, соединяющей точки 2 и 3.

Далее сравнивают между собой результаты опытов в вершинах нового симплекса, отбрасывают самый “неудачный” из них и переносят соответствующую вершину симплекса в точку 5. Затем рассмотренная процедура повторяется в течение всего процесса оптимизации.

Если достигнут экстремум критерия оптимальности, то дальнейшее движение симплекса прекращается. Это значит, что новый шаг возвращает исследователя в предыдущую точку факторного пространства.

Следует иметь в виду, что симплексный метод, так же как и метод крутого восхождения, является локальным методом поиска экстремума. Если существует несколько экстремумов критерия оптимальности, то нужно осуществить их поиск, каждый раз, начиная оптимизацию из новой области факторного пространства. Затем следует сравнить между собой найденные оптимальные условия и из всех вариантов выбрать наилучший.

При оптимизации необходимо принимать во внимание ограничения, наложенные на влияющие факторы и функции отклика.

Важно отметить, что при пользовании симплексным методом не обязательно дублировать опыты. Дело в том, что ошибка в отдельном опыте может только несколько замедлить оптимизацию. Если же последующие опыты выполняются безупречно, то движение к оптимуму продолжается.

Матрица исходного симплекса в кодированных переменных представлена в табл. 3.1. Символом "0” обозначены координаты центра плана, т.е. основной уровень.

Таблица 3.1-Матрица исходного симплекса

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта | *х1* | *х1* | *…* | *х1* | *х1* | Функция отклика |
| 1 | *k1* | *k1* | *…* | *kn-1* | *kn* | *y1* |
| 2 | *-R1* | *k1* | *…* | *kn-1* | *kn* | *y2* |
| 3 | *0* | *-R2* | *…* | *kn-1* | *kn* | *y3* |
| … | *…* |  | *…* | *…* | *…* | *…* |
| *n-1* | *0* | *0* | *…* | *kn-1* | *kn-1* | *yn-1* |
| *n* | *0* | *0* | *…* | *-Rn-1* | *kn-1* | *yn* |
| *n+1* | *0* | *0* | *…* | *0* | *-Rn* | yn+1 |

Очевидно, наибольшее количество опытов приходится ставить в начале эксперимента. Затем на каждом шаге оптимизации выполняется только один опыт.

Приступая к оптимизации, необходимо рассчитать матрицу исходной серии опытов в физических переменных, пользуясь формулой:

. (3.22)

В дальнейшем все операции производятся только с физическими переменными.

Условия каждого нового опыта рассчитываются по формуле:

, (3.23)

где *n* – число факторов в матрице планирования; *j* – номер опыта; *i* – номер фактора; *хi\* -* значение *i*-го фактора в самом “неудачном” опыте предыдущего симплекса.

Следует отметить, что на любом шаге оптимизации, осуществляемой симплексным методом, можно включить в программу исследований новый фактор, который до тех пор не принимался во внимание, но оставался на постоянном уровне. При этом значения всех ранее рассматриваемых факторов рассчитываются по формуле:

, (3.24)

где *i=1,2,…,n*, т.е. являются средними арифметическими значениями соответствующих координат предыдущего симплекса.

Значение вновь вводимого фактора определяется по формуле:

, (3.25)

где

;



*i* – номер фактора в матрице планирования;  - основной уровень этого фактора;  - выбранный шаг варьирования для данного фактора.

Отметим, что добавление нового фактора в состав полного факторного эксперимента сопровождается увеличением количества опытов вдвое. В этом смысле симплексный метод имеет очевидное преимущество.

# 4. Аппроксимация функций, заданных экспериментальными данными с помощью алгебраических и тригонометрических многочленов

В ходе автоматизированной обработки результатов испытаний технических систем часто возникает необходимость аппроксимации функций, заданных экспериментальными данными. В простейшей постановке задача аппроксимации формулируется следующим образом. Пусть в результате проведения эксперимента в точках *х1* *,..„хN* найдены значения *у1,...,уN* некоторой неизвестной функции *у = f(х)*, а также задан определенный класс функций *L*=*{φ* (х; *θ)},* где *θ=(θ1,...,θk)* - вектор произвольных параметров. Для функции *у=f(х)* необходимо выбрать функцию *φ(х;* *θ)* из класса *L*, в некотором смысле близкую к *f(х)*. В зависимости от выбора класса функций *L*, а также критерия близости функций, можно построить различные алгоритмы аппроксимации, позволяющие решать самые разнообразные практические задачи.

Одной из простейших задач аппроксимации является задача интерполяции, для которой функции *f(х)* и *φ(х; θ)* считаются "близкими", если:

*f(xj)* = *φ(х;* *θ),* (4.1)

т.е. *f(x)* и *φ(х;* *θ)* совпадают в точках *хj*, *j=1,...,N*. Точки *хj* обычно называются узлами интерполяции. Эта задача возникает в тех случаях, когда известно, что ошибки эксперимента являются настолько малыми, что их можно не учитывать.

Если ошибки в экспериментальных данных являются существенными, в качестве критерия близости функций можно взять сумму квадратов:

, (4.2)

а соответствующий метод аппроксимации называется методом наименьших квадратов.

Для решения различных практических задач можно также использовать минимаксный критерий, при котором функция *φ(х;* *θ)* выбирается из условия минимума функции:

. (4.3)

# 4.1 Аппроксимация функций с помощью алгебраических интерполяционных полиномов

Данные, полученные при испытаниях сложных технических систем, для наглядности часто представляются графически, или в виде таблиц. Ввод сложных графиков, или таблиц большого объема в ЭВМ приводит к усложнению алгоритмов обработки. Поэтому на практике программист обычно предпочитает иметь дело не с графиком и таблицами, а с формулами. Если ошибки в экспериментальных данных можно не учитывать, то информацию, заданную графически или таблично, часто представляют с помощью интерполяционных формул. Достачно простые и легко реализуемые на ЭВМ формулы дают алгебраические интерполяционные многочлены (алгебраические интерполяционные полиномы). Хотя с их помощью можно аппроксимировать только простейшие зависимости, в ряде случаев они дают приемлемые практические результаты [4].

Задача аппроксимации функции с помощью алгебраического интерполяционного полинома формулируется следующим образом. Пусть аналитическое выражение функции *у=f(х)* неизвестно, а заданы только ее значения  *у1,...,уN* в точках *х1* *,..„хN* некоторого отрезка *[а,b].* Необходимо найти полином степени *n*:

(4.4)

для которого выполняются условия:

, *j=1,...,N*. (4.5)

Так как в точках *х,* значения функции *у,* и значения полинома должны совпадать между собой, то неизвестные коэффициенты полинома можно найти путем решения системы уравнений (4.5).

В общем случае, когда *п+*1<*N*, система (4.5) не имеет решений. Попытка разработать математический аппарат, позволяющий решить такие системы, привела к созданию метода наименьших квадратов. Если среди узлов *хj* нет совпадающих между собой точек, то система линейных алгебраических уравнений (4.5) может иметь единственное решение только при   
*п+1=N,* т.е. *n* =*N-1*, так как определителем этой системы является определитель Вандермонда, имеющий вид:

**** (4.6)

Известно, что при различных *xj* этот определитель отличен от нуля [20], т.е. система уравнений имеет решение.

Отсюда следует, что по заданным *N* парам чисел (*хj*, *yj) j=1,...,N* мы можем найти полином степени *(N-* 1). Этот полином является единственным. В самом деле, если существует два полинома и , удовлетворяющих условиям интерполяции, то разность:

, (4.7)

представляющая собой алгебраический полином степени не выше *(N-1)-*й, в *N* точках обращается в нуль. Однако это невозможно, так как в силу основной теоремы высшей алгебры произвольный алгебраический полином *n-*й степени не может иметь более *п* корней [20].

Ниже мы рассмотрим некоторые наиболее распространенные методы построения интерполяционных полиномов.

# 4.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Одну из простейших формул интерполяции позволяет построить метод Лагранжа. По условию мы должны найти полином  степени *(N-1)*, который в *N* точках совпадает с *N* значениями функции *f(x)*. Очевидно, что если мы сможем найти систему полиномов *{φi(x)},* каждый из которых в точке *хj,* равен 1, а в остальных точках равен нулю, то интерполяционный полином можно представить виде:

. (4.8)

Это следует из того, что:

. (4.9)

Последовательность функций *{φi(x)}* такого типа называется фундаментальной системой полиномов.

По предположению полином *φi(x)* в точках *хk*, при *kj* обращается в нуль. Поэтому его можно представить в виде:

 (4.10)

где *Сi* — некоторая постоянная. Учитывая, что *φj(xj)*=1 , получим:

, *j=1,...,N*. (4.11)

Отсюда следует, что интерполяционный полином Лагранжа имеет вид:

. (4.12)

Выражение (4.12) можно представить в более компактной форме. Для этого введем вспомогательную функцию:

*,* (4.13)

производная которой равна:

*.* (4.14)

Легко заметить, что знаменатель функции (4.11) равен **. Тогда умножив и разделив каждое из слагаемых выражения (4.12) на *(x-xj)*, а также заменив выражение в числителе функцией *П(х)*, получим общеизвестную форму полинома Лагранжа:

; (4.15)

. (4.16)

Если узлы интерполяции являются равноотстоящими, т.е.

, то интерполяционный полином Лагранжа имеет вид

. (4.17)

где зависимая переменная *t* введена с помощью замены

*x = x1 + (t-1)h.*

Значения интерполяционного полинома Лагранжа равны значениям функции *f(x)* только в *N* точках; в остальных точках отрезка *[а, b]* разность:

. (4.18)

Значения интерполяционного полинома Лагранжа равны значениям функции *f(x)*, возникает вопрос, как сильно  может отличаться от *f(x)* вточках, отличных от узловых. Функция *R(x)*, характеризующая точность аппроксимации, называется остаточным членом интерполяции. Остаточный член интерполяции можно оценить теоретически, если функция *f(x) N* раз непрерывно дифференцируема. В этом случае остаточный член можно представить в виде:

, (4.19)

где *ξ* — некоторая точка отрезка *[а,b]*, зависящая от *х.*

На практике для оценки точности аппроксимации часто используют такие характеристики, как абсолютная погрешность метода в точке и абсолютная погрешность метода на отрезке *[а,b].* Абсолютной погрешностью метода в точке  называется по возможности малая положительная функция *δ(х) >* 0 такая, что:

|*R(x)*| ≤δ*(х).* (4.20)

Наименьшее число *δ\**, для которого δ*(х)≤δ*\* для любого *х,* называется абсолютной погрешностью метода на отрезке *[а, b].*

Если каким-то образом мы сможем найти число , то абсолютные погрешности формулы Лагранжа в точке *х* и на отрезке *[a,b]*, соответственно, равны:

; (4.20)

. (4.21)

В качестве примера рассмотрим построение интерполяционного полинома Лагранжа, аппроксимирующего зависимость тяги несущего винта вертолета от высоты *Н* висения у земли. Необходимость aппроксимации функции *Т* =*f(Н)* возникает при разработке алгоритмов автоматизированной обработки тяговых характеристик несущего винта. Экспериментальные значения этой функции, полученные в ходе испытаний вертолета Ми-6, представлены на рис. 1.1

Легко заметить, что зависимость тяги от высоты по форме напоминает параболу. Для аппроксимации функции *Т=f(Н)* с помощью интерполяционного полинома Лагранжа второй степени необходимо иметь значения этой функции в трех точках. Значения тяги и высоты, с помощью которых можно построить интерполяционный полином, заданы в таблице 4.1.

Таблица 4.1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *j* | 1 | 2 | 3 |
| *Нj,м* | 5 | 15 | 30 |
| *Tj*,m | 37,5 | 34.2 | 33 |

Согласно формуле (1.1.7) интерполяционный полином Лагранжа имеет вид:

****.

В точках *Нj* значения этого полинома равны экспериментальным данным. В остальных точках погрешность аппроксимации не превышает 150 кг.

На первый взгляд может показаться, что точность аппроксимации можно повысить за счет увеличения числа узловых точек *N.* Однако исследования показали, что при *N→∞* последовательность полиномов *{PN-1(x)}* не всегда сходится к *f(x)*. Отсутствие сходимости на практике проявляется в том, что при увеличении *N* отклонение полинома *PN-1(x)* от *f(x)* не уменьшается. В случае, когда функцию *f(x)* можно разложить в степенной ряд, сходящийся при произвольном конечном *x*, *PN-1(x)→f(x)* , причем сходимость *{PN-1(x)}* к *f(x)* является равномерной. Такие функции называются целыми [20].

Рунге построил пример бесконечно дифференцируемой функции *у = f(x)* =*1/(1+25х2)*, для которой интерполяционный процесс не сходится на отрезке [-1, 1]. Более того, при увеличении *N* значения полинома *Pn-1(x)* могут становиться сколь угодно большими по абсолютной величине. Математически это свойство выражается следующим образом [20]:

. (4.22)

Например, для *N=*6 полином *Р5(х)* имеет отклонение от *f(х)*, равное 0,44. При *N*=21 максимальное отклонение полинома *Р20(х)* от *f(x)* по модулю становится большим 58.

Практика показала, что аппроксимация с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа является достаточно эффективной, когда интерполируются гладкие функции и число *N* является малым. В частности в математическом обеспечении большинства ЭВМ имеются стандартные подпрограммы аппроксимации, в которых реализована формула Лагранжа при малых *N* (например, в некоторых подпрограммах сглаживания используется формула Лагранжа при *N*=4).

При применении формулы Лагранжа для обработки экспериментальных данных необходимо учитывать ошибки эксперимента. Если *δj* - погрешность, с которой найдено значение функции в точке *хj,*, то абсолютная погрешность в произвольной точке *х [а,b]* равна:

. (4.23)

Формула Лагранжа при *N≥*4 становится громоздкой при практическом использовании, т.к. в нее входит произведение *П(х).* Рассмотрим некоторые случаи выбора узлов интерполяции, когда формула Лагранжа значительно упрощается.

Предположим, что функция *у=f(x)* задана на отрезке   
[-1,1]. Дальше полученные результаты мы обобщим на случай произвольного отрезка *[а,b].* Сначала введем полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода. По определению полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода задаются с помощью формул [20]:

; (4.24)

; (4.25)

где *n* — порядок полинома.

Возьмем в качестве узлов интерполяции нули полинома Чебышева 1-го рода *Tn(x).* Из уравнения *Tn(x)=*0 получим:

. (4.26)

Так как узлами интерполяции являются нули полинома *ТN(х),* то *П(х)* = *TN(x) =* cos *[N*(arccos *x)]*, a:

 (4.27)

При *x* = *хj* имеем:

. (4.28)

Отсюда следует, что если узлами интерполяции являются нули полинома *Tn(x),* тo интерполяционный полином Лагранжа можно представить в виде:

. (4.29)

Предположим, что узлами интерполяции являются нули полинома Чебышева 2-го рода *Un(x)* . Решая уравнение *UN(x)=*0, получим нули полинома

. (4.30)

Аналогично предыдущему случаю, имеем:

 (4.31)

Производная функции *П(х)* имеет вид:

(4.32)

а при *х=хj*

. (4.33)

Отсюда следует, что если узлами интерполяции являются нули полинома Чебышева 2-го рода *Un(x),* то интерполяционную формулу Лагранжа можно представить в виде:

 (4.34)

Пусть теперь функция *у =f(x)* задана на произвольном отрезке [*a,b*]*.* Сделаем замену независимой переменной *х=φ1(u)* таким образом, чтобы функция *y = f(φ1*(*и*)) =*f1(и)* была задана на отрезке [-1,1]. Предположим, что функция *x*=*φ1(u)* имеет обратную *и= φ1-1*(*x*)и точкам *xj* соответствуют точки *uj*, являющиеся нулями одного из полиномов Чебышева. Тогда для аппроксимации функции *y=f1(u)* можно использовать - формулы (1.1.23) или (1.1.28). Если *у* =*РN-1,1(и)* аппроксимирует функцию *y=f1(u)* , то сделав замену переменных *и* = *φ1-1*(*x*), получим функцию  
*у=РN-1,1(и)=РN-1,1(и)(φ1-1*(*x))*=*PN-1(x)*, аппроксимрующую функцию *у =f(x)*. Легко заметить, что преобразование:

,

независимой переменной позволяет функцию, заданную на отрезке *[а,b]*, свести к функции на отрезке [1,1], а преобразование:

 (4.35)

дает возможность осуществить обратный переход.

# 4.3 Интерполяционная формула Ньютона

На практике для аппроксимации функций часто используется интерполяционный полином Ньютона. Этот полином вводится с помощью разделенных разностей различных порядков, найденных по значениям функции *y1,...,уN* в точках *x1,...,xN*.

По определению разделенные разности 1-го порядка равны:



 (4.36)

Разности 2-го порядка определяются с помощью разностей 1-го порядка:

(4.37)



Пусть найдены разности (n -1)-го порядка. Тогда разности n-го порядка можно вычислить по формуле:

 (4.38)

Разделенные разности располагаются в специальной таблице, которая строится по следующей схеме:

*х1 у1*

*f(x2,x1)*

*х2 у2*

*f(x3,x2) f(x3,x2,x1)*

*х3 у3 f(x4,x3,x2,x1)*

*………………………… f(x4,x3) f(x4,x3,x2) f(x5,x4,x3,x2,x1)*

*х4 у4 ………………………………… f(x5,x4,x3,x2)……….*

*……………………… f(x5,x4) f(x5,x4,x3)*

*х5 у5*

Каждое число этой таблицы равно частному от деления разностей двух смежных с ним чисел в столбце слева, на разность *хi*, соответствующих тем *уi*, которые лежат на диагоналях, проходящих через это число.

Разделенные разности n-го порядка можно представить в виде [4,7,16,22]

 (4.39)

Отсюда следует, что разделенная разность является симметричной функцией относительно узлов *х„* т.е. не зависит от порядка расположения входящих в нее переменных *х,.*

Теперь перейдем к построению интерполяционного полинома Ньютона. Пусть *х* - произвольная точка отрезка *[а,b]*. Рассмотрим разность 1-го порядка:

*.* (4.40)

Из этого выражения можно найти значение функции в точке*:*

. (4.41)

Разность 2-го порядка имеет вид:

 (4.42)

Отсюда:

.(4.43)

Подставив это выражение в (4.41), получим:

*.* (4.44)

Аналогично разность 3-го порядка:

*.* (4.45)

позволяет представить (4.44) в виде

.(4.46)

Продолжая процесс подстановки, получим выражение:

, (4.47)

которое можно переписать в следующей форме:

*f(x)* = *PN-1(x)* + *RN-1(x)* , (4.48)

где

*Pn-1(x)* = *y1 + (x-x1)f(x1,x2) +* ...+ *(x-x1)...(x-xN-1)f(x1,...,xN)*, (4.49)

*Rn-1(x)* = *(x-x1)...(x-xN)f (x,x1,...,xN)*. (4.50)

Полином *Pn-1(x)* является интерполяционным, так как имеют место равенства

*f(хj)* = *PN-1(xj)*, *j = 1,...,N.* (4.51)

Этот полином обычно называется интерполяционным полиномом Ньютона, a *Rn-1(x) -* остаточным членом формулы Ньютона. Так как по значениям функции в некоторых точках можно построить единственный интерполяционный полином, то полином Ньютона путем перегруппировки его членов можно преобразовать в интерполяционный полином Лагранжа и наоборот. Однако, в отличие от интерполяционного полинома Лагранжа, для которого каждое из слагаемых суммы (4.16) зависит от всех узлов интерполяции, произвольный *m*-й член полинома Ньютона зависит только от *т* первых узлов. Поэтому для полинома Ньютона добавление новых узлов интерполяции приводит лишь к появлению новых слагаемых полинома, без изменения первоначальных.

Остаточный член формулы Ньютона (4.50) представляет собой истинную погрешность метода интерполирования. Если известно, что функция *f(x)* *N* раз непрерывно дифференцируема, то:

, (4.52)

где *ξ* — некоторая точка отрезка [*а,b*], а остаточный член:

. (4.53)

На практике производные функции *f(x)* обычно известны и поэтому остаточный член часто оценивается непосредственно по формуле (4.50).

Если все узлы интерполяции являются равноотстоящими, т.е. *xi = x1+ (i-* 1)*h,* то разделенные разности имеют вид:

, (4.54)

где



Отсюда следует, что интерполяционную формулу Ньютона можно представить в следующем виде:

. . (4.55)

В результате мы получим интерполяционную формулу, которая называется интерполяционной формулой Ньютона интерполирования вперед. Эта формула имеет наибольшую точность в начале таблицы.

На практике часто используется интерполяционный полином Ньютона, представленный в несколько иной форме. Так как при построении интерполяционного полинома Ньютона порядок расположения узлов не играет роли, то формулу (4.49) можно представить в виде

 (4.56)

Если узлы *хj* являются равноостоящими, то из формулы (4.56) получим формулу Ньютона интерполирования назад [20]:

 (4.57)

которая имеет наибольшую точность в конце таблицы.

При построении интерполяционных полиномов Ньютона можно использовать таблицу разностей, каждый элемент которой



*х1 у1*

*∆ у1*

*х2 у2 ∆2у1* (4.58)

*∆ у2*

*х3 у3*

*……………………………………..∆N-1y1*

*……………………………………………….*

*……………………… ∆2у1………..∆2уN-2*

*хN уN*

В формуле (4.55) используется верхняя (нисходящая) строка этой таблицы, а в формуле (4.53) - нижняя (восходящая) строка таблицы.

Рассмотрим пример применения интерполяционного полинома Ньютона при обработке экспериментальных данных.

Аппроксимируем с помощью формулы Ньютона интерполирования вперед зависимость тяга несущего винта вертолета Ми-6 от высоты висения у земли. Для построения интерполяционного полинома второй степени выбираем значения тяги в трех точках. Значения тяги и высоты заданы в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| j | 1 | 2 | 3 |
| Hj, м | 5 | 15 | 25 |
| Tj, m | 39 | 35.9 | 35 |

Строим таблицу разностей вида (4.58)

5 39

3,1

15 35,9 2,2

0,9

25 35

Тогда формула интерполирования вперед имеет вид

.

После элементарных преобразований получим:

.

Очевидно, что в узлах интерполяции . Вычисления показали, что погрешность аппроксимации в других точках не превышает 150кг.

Кроме рассмотренных выше методов интерполяции функций, в современной вычислительной математике имеется много различных методов решения интерполяционных задач. Среди них в первую очередь следует выделить методы построения интерполяционных формул Гаусса, Стерлинга и Бесселя и т.д. Достаточно подробное изложение теории интерполяции, а также примеры аппроксимации можно найти в работах [20].

# 4.4 Интерполирование периодических функций, заданных экспериментальными данными

Задача аппроксимации периодической функции и с помощью тригонометрического интерполяционного многочлена формулируется следующим образом. Пусть на отрезке *[а,b]* задана функция *у=f(х)* значениями  *у1,...,уN* в точках *х1* *,..„хN*, причём эта функция является периодической с периодом  
 *T=b-a*. По экспериментальным данным необходимо найти неизвестные коэффициенты *ak, bk* тригонометрического многочлена:

,(4.59)

таким образом, чтобы:

, (4.60)

где *N*-целое нечетное число.

Сначала будем предполагать, что функция *у=f(х)* задана на отрезке *[0,2π],* тогда тригонометрический многочлен имеет вид:

. (4.61)

Коэффициенты тригонометрического многочлена можно найти путём решения системы линейных алгебраических уравнений (4.61). Эта система может иметь решение (в обычном смысле) только в том случае, когда выполняется условие *N=2m+1*.

Если число *N* является чётным, т.е. *N=2m*, то приближение для функции *y=f(x)* имеет вид:

; (4.62)

где









Пусть по определению:

. (4.63)

Тогда получим формулу аналогичную формуле Лагранжа:

. (4.64)

Рассмотрим некоторые частные случаи выбора узлов, позволяющих значительно упростить формулу (4.64):

* + 1. Пусть *N=2m+1* и *хj*являются нулями полинома:

; (4.65)

тогда

 (4.66)

* + 1. Eсли узлами интерполяции являются нули полинома:

, (4.67)

то .

Тогда:

 (4.68)

3) Аналогично можно показать, что если функция *у=f(х)* задана на отрезке *[0,2π],* то имеют место соотношения:

(4.69)

где *yj*-значения функции *у=f(х)* в точках:

. (4.70)

# **ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**

требования к оформлению отчета

Отчет должен быть оформлен грамотно, аккуратно, написан разборчиво. Все этапы выполнения работы необходимо пояснить в отчете.

Отчет должен содержать название лабораторной работы, задание в соответствии с вариантом, выданным преподавателем, а также следующие пункты:

1)условие задачи;

1. аналитическую модель описания рассматриваемого критерия оптимальности;
2. полученную модель решения;
3. при решении с помощью программы МаthСАD в отчет необходимо включить:

- распечатку фрагмента программы МаthСАD с исходными данными, промежуточными расчетами и обращением к функции поиска решения;

* распечатку результатов;
* график полученного решения.

Защита лабораторной работы проводится по контрольным вопросам и заданиям.

# Лабораторная работа № 1

**Графическое решение задачи линейного программирования**

**Цель работы**: изучить графический способ решения задач линейного программирования.

**Теоретические сведения.**

Линейное программирование (ЛП) - раздел математики, посвященный методам нахождения оптимума линейной функции нескольких переменных при линейных ограничениях тина равенства и неравенства.

Если число входных параметров (искомых переменных) равно двум, то задача линейного программирования имеет наглядное графическое решение.

**Пример:**

****

где D - область допустимых значений переменных х1, х2.

Построим систему координат *x10x*2,. так как *xi ≥*0, то вся область D принадлежит первому координатному углу.



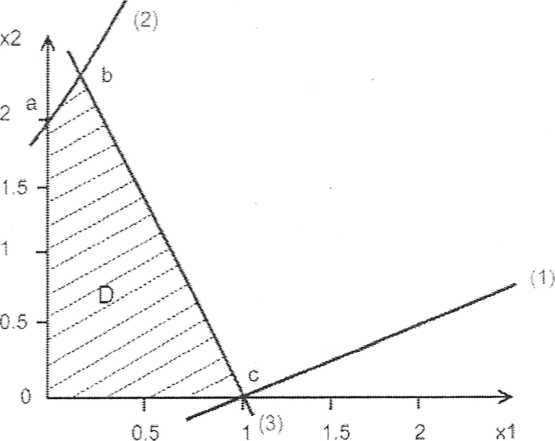
1-й этап. Изображение области *В* на плоскости.

Обозначим D1- множество точек (*x1*, х2), удовлетворяющих неравенству (1). Вся плоскость разбивается на множество точек, принадлежащих D*1* (условие выполняется) и не принадлежащих D1 (условие не выполняется). Построим границы области D1. На плоскости это будет прямая х1-2х2=1 или х1=*1+2x2*. Ее можно построить по двум точкам: (0; -0,5), (1; 0). Полученная прямая делит плоскость на две полуплоскости. Одна из них удовлетворят условию, а вторая - нет. Чтобы проверить, какая полуплоскость удовлетворяет условию, надо взять любую точку плоскости и подставить ее координаты в условие (1.1). Если условие выполняется, то точка находится в полуплоскости принадлежащей В. Например, подставим точку (0, 0) - неравенство выполняется, следовательно, D1 находится выше прямой.

Аналогичным образом строятся неравенства (2) и (3). Область *D* - точки, которые одновременно принадлежат *D1, D2* и *D3* (рис. 1).

Замечание: Если условие имеет вид равенства, то множество точек, удовлетворяющих ему - это прямая.

Условия (1.1) и (1.3) дают треугольник ОАВ. Второе условие дает прямую х1=х2. Так как условия должны выполняться одновременно, то областью D будет отрезок ОС внутри D1.



О

А

В

С

х2

х1

*Рис. 1.1 - Область допустимых значений*

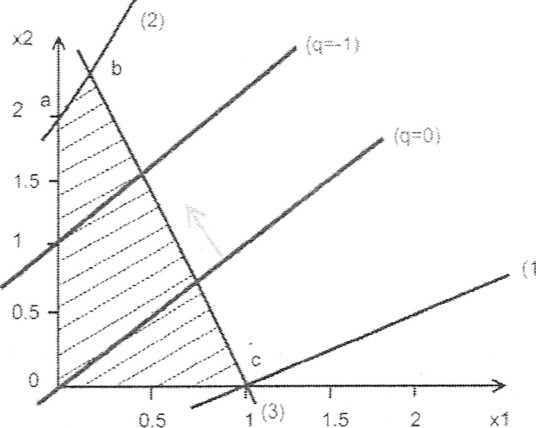
****

2-й этап. Изображение целевой функции.

Целевая функция - это функция, для которой нужно найти *min* или *mах*. Если она зависит от двух переменных, то ее изображают в виде линий равного уровня - таких линий, в каждой точке которых функция имеет одинаковое значение.

Рассмотрим способ построения линий равного уровня. Зафиксируем любое значение q, например, q=*0*. Получим уравнение x1 - х2 = 0 - это будет линия q = 0. Зафиксируем другое значение, например, q = -1. Получим две линии уровня - параллельные прямые. При переходе от линии q = 0 к линии q=-1 целевая функция уменьшается, и т. к. нужно найти минимум, то она "улучшается", т. е. при перемещении линии уровня в направлении, указанном стрелкой (рис. 1.2), целевая функция уменьшается.

Для решения задачи ЛП надо найти такую точку, чтобы она лежала на границе области D и через нее проходила линия равного уровня с минимальным значением q. Очевидно, что линия q = -1 не является оптимумом. Этим свойством будет обладать линия, проходящая через точку b.



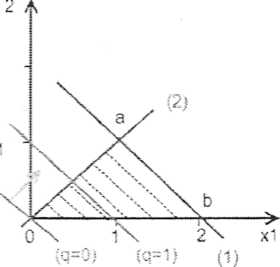
*Рис. 1.2 - Линии равного уровня*

Так как точка b находится на пересечении прямых (2) и (3), то для того чтобы определить ее координаты, необходимо решить систему уравнений:

****

В результате получим координаты *b(0.2; 2.4)*. Подставив координаты точки *b* в целевую функцию, найдем ее значение в этой точке: q = 02- *2,4 = -2,2*.

Замечание: иногда линия уровня параллельна какой-либо линии ограничения. В этом случае оптимальным решением будет являться целый отрезок.



Пример:

*Рис. 1.3*

В данном случае решением будет отрезок *[a,b]*. В целевую функцию можно подставить координаты любой точки, принадлежащей этому отрезку.

**Задание**. Исходные данные представлены в приложении 1.

Требуется:

1. Построить область допустимых значений.
2. Построить лини равного уровня.
3. Записать результат.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Что такое линейное программирование?
2. Алгоритм построения области допустимых значений.
3. Что такое линии равного уровня?
4. Всегда ли линии равного уровня в задаче ЛП параллельные прямые?

# Лабораторная работа № 2

**Симплекс-метод**

**Цель работы**: изучить способ решения задач линейного программирования симплекс-методом.

**Теоретические сведения**

Пусть имеем задачу линейного программирования в канонической форме:

 (2.1)

Решение системы называется базисным, если п-т переменных равны нулю. Переменные, которые равны нулю в базисной точке, называются небазисными переменными, остальные - базисными.

Симплекс-метод заключается в целенаправленном переборе допустимых базисных решений канонической задачи линейного программирования:

1. Ищется начальная базисная точка.

2. На последующих шагах переход от одного базисного решения к другому осуществляется по правилам.

**Правило *1.*** В базис переводится переменная *xi*, которая имеет в целевой функции коэффициент, максимальный по модулю среди отрицательных.

**Правило 2.** Из базиса исключается переменная *xi*, для которой выполняется условие:

, (ai,j > 0),

где *xi,j* - коэффициент при *xi*; *bi* - свободный коэффициент, правая часть уравнения.

**Правило 3.** Если целевая функция не содержит отрицательных коэффициентов при *х*, то оптимальное решение найдено.

**Правило 4.** Если при *ci* не существует *xi,j*>0, то задача не имеет решения.

**Задание**. Исходные данные в приложении 2.

1. Привести задачу к каноническому виду.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Записать результат.

**Пример расчета.**

Решить задачу симплекс- методом:

****

**Решение.**

Приводим задачу к каноническому виду: если знак «≤», то добавляем *xi*, если знак «≥», то вычитаем  *xi*. Если ищется максимум целевой функции, то коэффициенты при  *xi* умножаем на (-1) и устремляем функцию к минимуму:





У нас получилось 5 переменных: *х1,* х2, х3, х4, *х5*. Разбиваем переменные на два вида: базисные и небазисные. Количество базисных переменных равно числу ограничении, т.е. равно трем. Остальные переменные - небазисные.

2. Составляем начальную симплекс таблицу, т. е. выражаем базисные переменные через небазисные, так чтобы свободные члены в уравнении были неотрицательные.

Выразим переменную х1 из (2.6) и подставим в (2.7) и (2.8). Тогда из (2.7) легко найти *х4*, из (2.8) найдем х5. Подставив x1 в целевую функцию, получим:

*х1 = 1+2х2-х3;*  (2.9)

*x4= 4 + 3x2-2x3;*  (2.10)

*х5 = 3х3-7х2.* (2.11)

q=*1+2x2 –* х3 - х2 =*1 +* х2 - х3 → тin;

Получили, что *x1, x4* и *x5* - базисные переменные, а х2 и х3 - небазисные. Затем небазисные переменные х2 и х3 приравниваем к нулю, подставляем в получившиеся уравнения и находим значения базисных переменных и целевой функции. Таким образом, получили симплекс-таблицу для первой базисной точки:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | *x2* | x3 | х4 | *х5* | q |
| 1 | 0 | 0 | 4 | 0 | 1 |

Полученная базисная точка соответствует координатам точки *С(1;0)* (см. рис. 1.1). Так как в полученной целевой функции есть отрицательный коэффициент при х3, то оптимальное решение еще не найдено, поэтому переходим к новому базису.

3. В соответствии с правилом 1 в базис переводим переменную х3, так как она имеет отрицательный знак в целевой функции. В соответствии с правилом 2:

a13=1 b1=1 b1/a13=1-min,



a43=2 *b4=4* b4/a43 =2,



а53=-3 b5=0 a53<0.



Из базиса исключаем *x1*, т. к. ему соответствует минимальное значение.

Выражаем переменную х3 из уравнения (2.9) и подставляем в остальные уравнения и целевую функцию.

q = х1-х2→тin;

****

Небазисные переменные *x1* и х2 приравниваем к нулю, подставляем в получившиеся уравнения и находим значения базисных переменных и целевой функции. Таким образом, получили симплекс-таблицу для базисной точки:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х1 | *x2* | *x3* | х4 | х5 | q |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | 0 |

Полученная базисная точка соответствует координатам точки *C(0; 0)* (см. рис. 1.1). Так как в полученной целевой функции есть отрицательные коэффициент при х2, то оптимальное решение еще не найдено, поэтому переходим к новому базису.

4. В соответствии с правилом 1 в базис переводим переменную х2, так как она имеет отрицательный знак в целевой функции. В соответствии с правилом 2:

a32 = -2 b3 = 1 a32 < 0;

a42 = 1 b4 = 2 b3/a42 = 2 – *min;*

a52 = 1 b5 = 3 b5/a52 = 3.

Из базиса исключаем х4, т. к. ему соответствует минимальное значение.

Выражаем переменную х2 из уравнения (2.13) и подставляем в остальные уравнения и целевую функцию.

q = - 2 + х4 – х1 →min;

****

Небазисные переменные *x1* и х4 приравниваем к нулю, подставляем в получившиеся уравнения и находим значения базисных переменных и целевой функции. Таким образом, получили симплекс таблицу для третьей базисной точки:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | *x2* | x3 | х4 | *х5* | q |
| 1 | 0 | 5 | 0 | 1 | -2 |

Полученная базисная точка соответствует координатам точки *A(О; 2)* (см. рис. 1.1). Так как в полученной целевой функции есть отрицательный коэффициент при *x1*, то оптимальное решение еще не найдено, поэтому переходим к новому базису.

5. В соответствии с правилом 1 в базис переводим переменную *x1*, так как она имеет отрицательный знак в целевой функции. В соответствии с правилом 2:

a31 =2 *b3=5* b3/a31 =5/2,

a21 =1 b2=2 b2/a21 =2,

a51 =5 *b5=1* b5/a51 =1/5 – *min,*



из базиса исключаем *x5*, т. к. ему соответствует минимальное значение.

Выражаем переменную *x1* из уравнения (2.17) и подставляем в остальные уравнения и целевую функцию.

q = *-2,2+0,8*х4+*0,2*х5 → *min;*

****

Небазисные переменные х4 и х5 приравниваем к нулю, подставляем в получившиеся уравнения и находим значения базисных переменных и целевой функции. Таким образом, получили симплекс-таблицу для четвёртой базисной точки:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х1 | х2 | хЗ | х4 | х5 | q |
| 0,2 | 2,4 | 5,6 | 0 | 0 | -2, 2 |

Полученная базисная точка соответствует координатам точки *B(0,2; 2,4)* (см. рис. 1.1).

Так как полученная целевая функция не содержит отрицательных коэффициентов при *х*, то оптимальное решение найдено.

Ответ: х1=0,2; х2=2,4: q=-22.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Как записывается каноническая форма задачи линейного программирования?
2. Какие переменные называются базисными?
3. В каком случае решение считается найденным?
4. Всегда ли существует решение задачи линейного программирования? В каком случае у задачи нет решения?
5. Какие значения принимают небазисные переменные в базисной точке?

# Лабораторная работа № 3

**Задача планирования при ограничениях на ресурсы**

**Цель работы**: изучить решение задачи моделирования в условиях ограниченности ресурсов.

**Теоретические сведения**

У предприятия есть т видов ресурсов (сырьё, оборудование, рабочая сила и т. д) каждая в количестве *bi* единиц *i*=1,2,…*m*. Предприятие выпускает п видов продукции. *ai,j*- количество единиц *i*-го ресурса, необходимого для выпуска одной единицы j-й продукции. Прибыль от одной единицы j-ой продукции равна *сi*, $. Продукцию j-го вида надо выпускать не менее *pi*- единиц.

Определить количество выпускаемой продукции каждого вида, при котором суммарная прибыль максимальна.

При составлении модели оптимизации необходимо выполнить 3 этапа:

1.Определяем значения, каких параметров надо найти (что является входными параметрами). Обозначим их *х1,x2,…xn.*.

1. Записываем выражение целевой функции через *x1,x2,…xn.*
2. Записываем выражение для ограничений через *х1,x2,…xn*.

Итак:

1.Обозначим *xj* - объём выпуска j-й продукции (*j=1,2,...n*).

2.Целевая функция - прибыль. От одной единицы первой продукции она равна *с1* $, а от *x1* единицы – *c1x1*.

Аналогично от выпуска x2 единицы второй продукции c2x2 и т.д. Суммарная прибыль:

q= c1x1+c2x2+…+cnxn → max (3.1)

3.1.Ограничения на объём выпуска согласно условию:

xj≥ pj (3.2)

3.2.Ограничения на ресурсы. На одну единицу первой продукции надо затратить аm ед. первого ресурса, а на выпуск *x1* ед. первой продукции надо *а11x1* первого ресурса:

а11 x1 + а21 x2+…a1xn≤ b1 (3.3)



am1x1+am2х2 +…+атп хп < bт

(4)

надо привести всё к

3.3. По физическому смыслу:

хj>0.

Замечание: часто в таких задачах исходные данные имеют различные размерности одной размерности.

**Задание**. Исходные данные в приложении 3.

1. Построить систему ограничений.
2. Записать целевую функцию.
3. Решить задачу с помощью MathCAD.
4. Записать результат.

**Пример решения**

Условие. Автозавод выпускает две модели автомобилей. При производстве одной машины каждой марки

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Марка авто | Квалифицированный труд (часы) | Неквалифицированный труд (часы) | Сырье $ | Прибыль $ |
| Вольво-850 | 50 | 30 | 1500 | 1000 |
| Вольво-940 | 20 | 40 | 500 | 500 |

На автозаводе работают 1000 квалифицированных и 900 неквалифицированных рабочих, каждый из которых работает 40 часов в неделю. Затраты на сырье не должны превышать 900 тыс. $ в неделю. Рабочие, осуществляющие отправку автомобилей из цеха, работают по пятидневной рабочей неделе с производительностью 210 автомобилей в день. Какой объем продукции даст максимальную прибыль?

**Решение**

1. Определяем входные параметры:

x1 - количество автомобилей Вольво-850, выпускаемых в неделю

х2 - количество автомобилей Вольво-940, выпускаемых в неделю

1. Выражение для целевой функции - q=1000x1+500x2.
2. Ограничения:

*50x1+20х2≤1000·40=40000* рабочих часов в неделю (ограничение по квалифицированному труду);

*30x1+40х2≤900·40=36000* рабочих часов в неделю (ограничение по неквалифицированному труду);

1500x1+500x2≤900000 – ограничение по сырью;

*$ в неделю*

*x1+x2≤ 210· 5 = 1050-* ограничение на доставку авто.

Авто в день дней в неделю авто в неделю

4. Решение задачи в МathCAD.

Записываем начальные значения искомых переменных и выражение для целевой функции с помощью панели «Арифметика» (рис. 1).



*Рис.3.1- Панель «Арифметика»*

х1:=1; х2:=1; q**(**х1, х2*): = 100-х2 + 500-х2.*

В блоке Given записываем ограничения:

*x1≥0; x2≥0;*

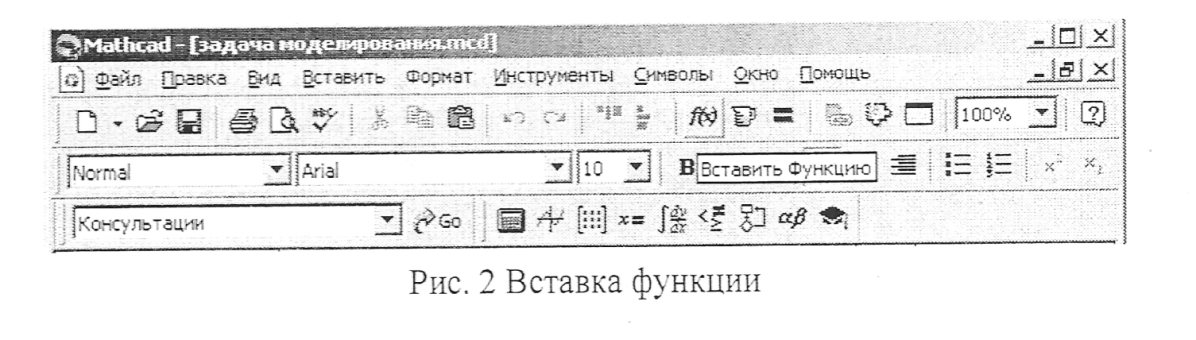
*50x1+20х2≤40000;*

*30x1+40х2≤900·40=36000;*

1500x1+500x2≤90000;

*x1+x2≤1050.*

Затем переменным х1 и х2 присваиваем минимум (максимум) целевой функции q(х1,х2) при помощи функции Мinimaze (Махimaze) которая находится на панели инструментов (рис. 2):



**

Для получения решения записываем = и нажимаем Enter. После этого полученное *x2* значение подставляем в выражения для q: q(x1, х2) = и нажимаем Enter.

Полностью решенная задача в МаthCAD выглядит следующим образом (рис. 3.2).

х1:=1; х2:=1;

q**(**х1, х2*): = 100-х2 + 500-х2.*

Given

*x1>0 x2>0;*

*50x1+20х2≤40000;*

*30x1+40х2≤900·40=36000;*

1500x1+500x2≤90000.

*x1+x2≤1050.*

**

**

*Рис.3.2- Решение задачи*

**Контрольные вопросы и задания**

1. Назовите основные этапы составления модели.
2. В чем состоит отличие целых функций прибыли и затрат?
3. Запишите ограничения на ресурсы в общем виде.
4. В чем смысл ограничений на физическую реализацию?

# Лабораторная работа № 4

**Транспортная задача. Задача с процентными долями**

**Цель работы:** изучение способа решения транспортных задач, а так же задач, содержащих процентные отношения.

**Теоретические сведения**

**4.1. Транспортная задача**

Имеется т=2 пункта производства А1, А2, и п=3 пункта потребления B1, В2, ВЗ некоторого продукта. Перевозка из пунктов производства в пункты потребления 1 ед. продукции обходится в некоторую сумму, указанную в тарифной матрице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | ВЗ | производство |
| А1 | 10 | 5 | 6 | 50 |
| А2 | - | 8 | 12 | 40 |
| потребление | 30 | 30 | 25 |  |

Известно количество производимого продукта в каждом пункте производства и количество потребляемого в пункте потребления.

Составить план перевозок, при котором затраты минимальны.

**Решение**

Нам надо определить, какое количество продукта надо перевозить из каждого пункта производства в каждый пункт потребления.

1. Обозначаем:

*x*1 - количество продукта, перевозимого из А1 вВ1

x2-из А1 и В2;

x3-из А1 и В3;

x4-из А2 и В1;

x5-из А2 и В2;

x6-из А2 и В3.

2. Общие затраты на перевозку:

q=10x1+5x2+6x3+7x4+8x5+12x6-min

1. Ограничения на вывоз: из каждого пункта производства нельзя вывезти больше, чем там производят. Из А1 надо вывезти в В1 - х1 ед., в В2- х2 ед., в ВЗ - *хЗ* ед. Следовательно: *х1+* *х2 + хЗ ≤ 50*. Аналогично для А2: *х4 -* х5 + х6 ≤ 40.
2. Ограничения на привоз: в каждый пункт потребления нельзя привозить меньше, чем там потребляют.

B1: x1+x4≥30;

B2: x2+x5≥30;

B3: x3+x6≥25.

**Замечание:** типичная ошибка: при составлении модели коэффициенты целевой функции матрицы (тариф на перевозку 10, 5 и т.д.) заносят в ограничения. Следует помнить, в ограничениях на ввоз вывоз коэффициенты могут быть равны только 1 или 0, а тарифные коэффициенты встречаются только в целевой функции.

4.1 Решение с помощью MathCad.

x1:=1; x2:=1; x3:=1;

x4:=1; x5:=1; x6:=1;

q(x1,x2,x3,x4,x5,x6):=10\*x1+5\*x2+6\*x3+7\*x4+8\*x5+12\*x6;

Given

x1 ≥ 0; x2 ≥ 0; x3 ≥ 0;

x4 ≥ 0; x5 ≥ 0; x6 ≥ 0;

x1 + x2 + x3 ≤ 50;

x4 + x5 + x6 ≤ 40;

x1 +x4 ≥ 30;

x2 +x5 ≥ 30;

x3 + x6 ≥ 25;

.

x1

x2

x3 := Minimize (q,x1,x2,x3,x4,x5,x6)

x4

x5

x6

x1 0

x2 25

x3 = 25

x4 30

x5 5

x6 0

4.2 Задачи с процентными долями

Завод выпускает два изделия И1 и И2, исходные данные в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Показатель | Затраты на одно изделие | | Ресурс |
| И1 | И2 |
| Трудозатраты (человеко-дни) | 2 | 3 | 60 |
| Сырье (кг) | 20 | 10 | 300 |
| Прибыль (тыс. руб.) | 50 | 50 |  |

По решению профсоюза, трудозатраты на И2 должны составлять не более 50% от общих трудозатрат. Составить наиболее прибыльный план выпуска изделий.

**Решение**

1. х1 — выпуск И1; х2 - выпуск И2.
2. q = 50х1 -50 х2 -> mах

3.1 Использование ресурсов: 2\*х1 – 3\*х2 ≤ 60,

20\*х1 + 10\*x2 ≤ 300.

3.2 Процентные доли. Поскольку заранее неизвестно, будет ли полностью израсходован ресурс на трудозатраты, то нельзя записать: трудозатраты на И2≤50. Поступим следующим образом. Обозначим: t - общие трудозатраты. Тогда трудозатраты на И2 ≤ 0,5\*t.

Следовательно 3 \*х2≤ 0,5 \*(2\*х 1+3 \*х2)

Отсюда имеем:

-х1 + 1,5\*х2≤0.

Получим окончательный вариант модели:

2\*х1+3\*х2 ≤ 60;

20\*х1 + 10\*х2 ≤ 300;

-х1+1,5\*х2 ≤ 0;

q = 50\*x1 + 50\* х2 → mах.

4. Выполнение задания в среде МаthCAD.

x1 := 1;

x2 := 1;

q(x1,x2):=50\*x1 + 50\*x2;

Given

х1≥0;

х2≥0;

2х1+3х2≤60;

2х1+10х2≤300;

-х1+1,5х2≤0;





**Задание.** Исходные данные в приложении 4.

1. Построить систему ограничений.
2. Записать целевую функцию.
3. Решить задачу с помощью МathCAD.
4. Записать результат.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Общий алгоритм разработки модели решения задачи.
2. Что такое область допустимых решений? Как она определяется в задаче
3. Что такое целевая функция?
4. Алгоритм решения в МathCAD.

# Лабораторная работа № 5

**Комплекты и пропорции. Выпуск разнородной продукции на одном оборудовании**

**Цель работы:** изучение способов решения задач линейного программирования с комплектами и пропорциями, а также при выпуске разнородной продукции на одном оборудовании.

**Теоретические сведения**

**Комплекты и пропорции**

Завод выпускает 2 изделия U1 и U2. Затраты ресурсов даны в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Показатель | Затраты на 1 изделие | | Ресурс |
| U1 | U2 |
| Трудозатраты | 2 | 3 | 60 |
| Сырье | 20 | 10 | 450 |

При производстве одной единицы изделия U2 получается 9 ед. скоропортящегося продукта А, который частично используется для производства *U*1 в количестве 2ед. на 1ед. продукции, а остальная часть уничтожается. Производственные мощности позволяют уничтожить не более 36 ед. продукта А.

Определить оптимальный выпуск UI и *U2*, если:

* + 1. Изделия входят в комплект в количестве 3 шт. UI и 2 шт. Надо максимизировать число комплектов.

**Решение**

Обозначим: *х1* - выпуск *U1*, х2 - выпуск U2, хЗ - количество комплектов. Ограничения на ресурс:

*20х1+10x≤450.*

Ограничения на уничтожение:



Продукт А переработка.

Ограничение на комплектность:

*х1≥3х3,*

*х2≥2х3.*

Целевая функция: *q= х3→max.*

Полученные ограничения:



*20x1+10х2≤450;*

-2x1+9x2≤3;

*x1-3x2≥0;*

*x1-2x2≥0.*

* + 1. Количество изделий UI и U2 должно выпускаться в пропорции 3:2. Максимизировать суммарный выпуск изделий.

**Решение**

Обозначим *х1* - выпуск *U1*, *х2* - выпуск U2.

Ограничение на ресурс и на уничтожение:

Ограничения на ресурс:

*2x2+3х2≤60;*

*20x1+10х2≤450;*

Ограничения на уничтожение: продукт А переработка:

*9x1+3х2≤36.*

Ограничение на пропорцию:



Целевая функция: *q= х1+ х2→max.*



**Выпуск разнородной продукции на одном оборудовании**

Завод выпускает детали *А* и *Б*. Цех №1 может изготовить за смену 600 деталей *А* или 1200 деталей *Б*. Эти детали затем поступают в цех №2, где за 1 час могут обработать 150 деталей *А* или 100 деталей *Б*. Сколько деталей *А* и *Б* может выпускать завод за восьмичасовую смену, чтобы их общее количество было максимально.

**Решение**

Обозначим: *x1* и *х2* - выпуск деталей *А* и *Б* за смену.

Если за смену изготовить 600 деталей *А*, то на 1 деталь тратиться 1/600 часть смены; на *x1* деталь - надо *x1/600* часть смены. Аналогично на х2 деталей *Б* надо *х2/1200* частей смены. Получаем:



В цехе №2 на обработку деталей *А* надо *х1*/*150* часа, на детали *Б* - надо *х2*/*100* часа:



Целевая функция: *q=х1+х2→max.*



**Задание**. Исходные данные в приложении 5.

1. Записать целевую функцию.

1. Составить ограничения.
2. Решить задачу с помощью МаthCAD.
3. Записать результаты.

**Контрольные вопросы и задания**

1. Общий алгоритм разработки модели решения задачи.
2. Что такое область допустимых решений? Как она определяется в задаче?
3. Что такое целевая функция?
4. Что такое нормальный вектор? Каковы его характеристики? Направление нормального вектора.

Алгоритм решения в МаthCAD.

# РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Фирма производит 2 продукта *А* и *В*, продаваемых соответственно по 8 и 15 центов за упаковку.

Продукт *А* обрабатывается на машине 1, продукт *В* на машине, характеристики машин в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Показатель | Машина | |
| I | II |
| Производительность (кг. сырья в час) | 5000 | 4000 |
| Потери % | 10 | 20 |
| Рабочий день (час) | 6 | 5 |
| Цена 1 часа работы | $288 | $336 |

Затем оба продукта упаковываются. 1 кг сырья стоит 6 центов. Упаковка продукта *А* весит 1/4 кг, а упаковка *В* - 1/3 кг. Фирма работает 10 часов в день, производя за 1 час продукцию стоимостью $360. Какое потребление сырья для продуктов *А* и *В* максимизирует дневную прибыль?

**Пример расчета**

1. Обозначим х1 - потребление кг сырья для производства продукта *А*; х2 - потребление кг сырья для производства продукта В.

2. Целевая функция:

 - стоимость работы оборудования I в день:

 - стоимость работы оборудования II в день.



- производится продукта *А* в день с учетом потерь; - производится продукта *В* в день с учетом потерь.



 - количество упаковок продукта *А* в день;

 - количество упаковок продукта *В* в день.

Доход от продажи продуктов:

 - стоимость упаковок продукта *А*;



- стоимость упаковок продукта *В.*

Затраты на закупку сырья:

- стоимость сырья для продуктов А и В. Тогда целевая функция будет иметь вид:



3. Ограничения:

На работу оборудования:

;.



На стоимость продукции:

4. Решение в MathCAD.



х1:=1; х2:=1;

Given

;; *х1≥0, х2≥2х3,*



.

**Вывод**: для получения максимальной дневной прибыли необходимо потреблять сырье *В* в количестве 104кг в день, при этом прибыль составит 2,16·104$.

# Приложение 1

**Исходные данные по выполнению работы «Графическое решение задачи линейного программирования»**

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант №1    Вариант №2    Вариант №3    Вариант №4 | Вариант №5    Вариант №6    Вариант №7    Вариант №8 |
| Вариант №9    Вариант №10    Вариант №11    Вариант №12    Вариант №13 | Вариант №14    Вариант №15    Вариант №16    Вариант №17    Вариант №18 |

# Приложение 2

**Исходные данные по выполнению работы**

**«Симплекс-метод»**

Найти значение функции *q*, используя cимплекс-метод.

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант №1    Вариант №2    Вариант №3    Вариант №4 | Вариант №5    Вариант №6    Вариант №7    Вариант №8 |

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант №9    Вариант №10    Вариант №11    Вариант №12    Вариант №13 | Вариант №14    Вариант №15    Вариант №16    Вариант №17    Вариант №18 |

# Приложение 3

**Исходные данные по выполнению работы**

**«Задача планирования при ограничениях на ресурсы»**

***Вариант 1***

Предприятие производит два вида продукции: А и В. Каждый продукт должен пройти следующие этапы выполнения работ: рихтовка, сверление, чистовая обработка. Время обработки в часах для каждого из продуктов приведено в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Продукция А | Продукция В |
| Рихтовка | 0,5 | 0,25 |
| Сверление | 0,4 | 0,3 |
| Чистовая обработка | 0,2 | 0,4 |

Фонд времени работы оборудования в неделю составляет не более: 40, 36, 36 часов соответственно.

Прибыль от продуктов А и В составляет не менее 5 и 3 тыс.руб. соответственно.

Определить недельные нормы выпуска продуктов А и В, при котором доход предприятия от реализации всей продукции максимален.

***Вариант 2***

Предприятие производит два вида продукции: А и В, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт обрабатывается последовательно на оборудовании: №1, №2, №3. Затраты электроэнергии (кВт/час) на каждом этапе выполнения работ приведены в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Оборуд. №1 | Оборуд. №2 | Оборуд. №3 |
| Продукция А | 0,5 | 0,4 | 0,2 |
| Продукция В | 0,25 | 0,3 | 0,4 |

Ежемесячный расход электроэнергии для каждого типа оборудования запланирован и составляет не менее 300 кВт/час, 280 кВт/час, 335 кВт/час. Затраты на производство одной единицы продукции А и В не должны превышать 400 и 420руб. соответственно.

Определить нормы выпуска продуктов А и В, при которых затраты предприятия на производство минимальны.

***Вариант 3***

Даны 3 вида продуктов. Содержание питательных веществ (в килокалориях) в каждом из продуктов представлено в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Продукт №1 | Продукт №2 | Продукт №3 |
| Жиры | 3 | 0 | 4 |
| Белки | 10 | 1 | 2 |
| Углеводы | 0 | 4 | 3 |

Оптимальная потребность в питательных веществах в сутки составляет не более 20, 45, 40 кКал соответственно. Прибыль от продажи каждого продукта не менее 20, 18, 21 руб. соответственно. Требуется составить рацион питания таким образом, чтобы от продажи продуктов была максимальной, но рацион содержал бы питательные вещества в количестве, соответствующем нормам.

***Вариант 4***

Минимальная суточная потребность в питательных веществах составляет 20, 40, 60, 80 единиц соответственно. Содержание питательных веществ в каждом из продуктов представлено в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Продукт №1 | Продукт №2 | Продукт №3 |
| Жиры | 3 | 0 | 4 |
| Белки | 10 | 1 | 2 |
| Углеводы | 0 | 4 | 3 |
| Витамины | 4 | 6 | 2 |

Планируется на приобретение продуктов потратить не более 320, 180, 210 руб. соответственно. Составить из данных продуктов рацион питания таким образом, чтобы его стоимость была минимальной, но при этом рацион содержал бы все необходимые питательные вещества.

***Вариант 5***

Изготовление продукции трех видов требует использования трех компонентов. За месяц на производство продукции планируется затратить сырья не более, чем: 300,250, 1200 кг соответственно.

Количество сырья (кг), необходимое для изготовления каждого из видов продукции, приведено в таблице.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Продукт №1 | Продукт №2 | Продукт №3 |
| Компонент 1 | 5 | 4 | 4 |
| Компонент 2 | 6 | 1 | 2 |
| Компонент 3 | 1 | 2 | 8 |

Запланированная прибыль составляет не менее 300, 330, 800 руб. соответственно. Составить план выпуска продукции, при котором прибыль будет максимальной

***Вариант 6***

Комбикормовый завод может изготавливать смеси трех видов. При этом используется три вида зерна. За месяц на производство продукции планируется затратить сырья не менее, чем: 300, 250, 1200 кг соответственно. Количество сырья (кг), необходимое для изготовления каждого из видов продукции, приведено в табл.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Смесь №1 | Смесь №2 | Смесь №3 |
| Ячмень | 5 | 4 | 4 |
| Просо | 6 | 7 | 2 |
| Пшеница | 1 | 2 | 8 |

Затраты на производство одного кг. продукции каждого вида не должны превышать 300, 330, 800руб. соответственно.

Составить план выпуска продукции, при котором затраты будут минимальны. Какая из возможных смесей является самой дешевой?

***Вариант*** 7

Предприятие включает четыре группы основного технологического оборудования и может выпускать продукцию четырех видов. Время, затрачиваемое на каждом этапе работ, указано в табл. При этом месячный фонд работы оборудования составляет не более: 300,250,120,200 часов.

Запланированная прибыль составляет не менее 300,330, 800, 500 руб. соответственно.

Составить план выпуска продукции, при котором прибыль будет максимальной при данных ограничениях.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Прод. № 1 | Прод. №2 | Прод. № 3 | Прод. №4 |
| Оборуд.№1 | 4 | 2 | 6 | 5 |
| Оборуд.№1 | 7 | 4 | 4 | 6 |
| Оборуд.№1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| Оборуд.№1 | 5 | 8 | 4 | 6 |

***Вариант 8***

Предприятие выпускает неоднородную продукцию двух видов: А и В. За месяц на производство продукции планируется затратить не более: 2400 чел/дн, 2000 кВт/час, 2 тонн сырья. На производство единицы продукции расходуется следующие технико-экономические показатели:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | На единицу продукции А | | На единицу продукции В | |
|  | Техпроцесс 1 | Техпроцесс 2 | Техпроцесс 3 | Техпроцесс 4 |
| Трудоёмкость | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Энергоёмкость | 7 | 5 | 4 | 3 |
| Сырьё | 3 | 5 | 10 | 15 |
| Время работы оборудования | 13 | 12 | 10 | 14 |

Запланированная прибыль составляет не менее 40, 50, 90, 42 руб. Составить план выпуска продукции по каждому техпроцессу, при котором прибыль будет максимальной.

***Вариант 9***

За месяц на производство продукции планируется затратить не менее: 2400 чел/дн, 2000 кВт/час, 2 тонн сырья. На производство единицы продукции расходуется технико-экономические показатели, приведенные в таблице. Затраты на производство одной единицы продуктов А и В по каждому техпроцессу составляют, соответственно, 40, 50,90,42 руб.

Составить план выпуска продукции по каждому техпроцессу, при котором затраты будут минимальны.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | На единицу продукции А | | На единицу продукции В | |
|  | Техпроцесс 1 | Техпроцесс 2 | Техпроцесс 3 | Техпроцесс 4 |
| Трудоемкость | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Энергоемкость | 7 | 5 | 4 | 3 |
| Сырье | 3 | 5 | 10 | 15 |
| Время работы оборудования | 13 | 12 | 10 | 14 |

***Вариант 10***

Дано: 6 видов сырья, ассортимент ограничен 5 видами. Расход сырья (кг) на единицу продукции представлен в табл.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | любительская | сервелат | ростовская | московская | украинская |
| Говядина в/сорт | 100 | 61,5 |  |  | 115,5 |
| Говядина 1 сорт |  |  | 61,5 | 53,8 |  |
| Свинина 1 сорт |  | 53,8 | 76,4 | 23,1 |  |
| Грудинка свиная | 53,8 | 38,5 |  | 23,1 |  |
| Свиной шпик |  |  | 15,4 |  | 38,5 |

Прибыль от продажи 1кг продукции составляет 72,50; 66,00; 12,50; 91,00; 43.60 руб.соответственно.

Ресурсы мяса составляют: 103; 497; 427; 576; 769; 148 тонн.

Заводу приходится решать задачу: какие колбасных изделий и в каком количестве необходимо производить при имеющихся мощностях, ресурсах сырья, чтобы получить максимальную прибыль

***Вариант 11***

Продукция трех видов поставляется в пункты А, В, С. Закупочная цена для пунктов А, В, С приведена в табл. Пункт А закупает продукцию на сумму, не более 1000р. в месяц. Пункт В закупает продукцию на сумму, не более 1200р. в месяц. Пункт С закупает продукцию на сумму, не более 1100р. в месяц. Прибыль за единицу продукции составляет 100, 200, 300 рублей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | А | В | С |
| Продукция № 1 | 2 | 3 | 3 |
| Продукция № 2 | 1 | 4 | 2 |
| Продукция № 3 | 2 | 2 | 2 |

Составить план производства продукции, при котором прибыль от продажи будет максимальна.

***Вариант 12***

Изготовление продукции трех видов требует использования четырех видов сырья. Количество сырья (кг), необходимое для изготовления каждого из видов продукции, приведено в табл.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Сырье №1 | Сырье №2 | Сырье №3 | Сырье  №4 |
| Продукция № 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| Продукция № 2 | 2 | 0 | 1 | 2 |
| Продукция № 3 | 3 | 1 | 2 | 3 |

Сырье поступает с других заводов и на его доставку для каждого вида продукции выделяется бензин в количестве: 120 л., 180 л., 150 л. Один литр стоит не более 4 руб.

План поставки сырья за месяц составляет не менее: 100, 95, 75, 80кг соответственно. Составить план производства продукции, при котором затраты на доставку будут минимальны, а запасы сырья используются максимально.

# Приложение 4

Исходные данные по выполнению работы «Транспортная задача. Задачи с процентными долями»

Вариант 1

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *потребители* | *В1* | *В2* | *ВЗ* | *В4* | *производство* |
| *производители* |  |  |  |  |  |
| *А1* | *4* | *3* | *3* | *1* | *8* |
| *А2* | *3* | *2* | *4* | *8* | *11* |
| *A3* | *5* | *4* | *6* | *3* | *16* |
| *потребность* | *4* | *9* | *9* | *13* |  |

б) В трех продуктах питательные вещества содержатся в следующем количестве:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| питательные | продукты | | | потребность |
| вещества | 1 | 2 | 3 |  |
| жиры | 3 | 0 | 4 | от 5 % до 30% кол-ва белков |
| белки | 10 | 1 | 2 | >20 ед. |
| углеводы | 0 | 4 | 3 | <30 % кол-ва жиров |
| витамины | 4 | 6 | 2 | >40 ед. |
| цена | 32 | 18 | 10 |  |

Составить рацион минимальной стоимости.

***Вариант 2***

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | W | X | *У* | z | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| *А* | 1 | 4 | 1 | 9 | 60 |
| *В* | 9 | 2 | 2 | 8 | 30 |
| *С* | 6 | 1 | 7 | 3 | 30 |
| потребность | 15 | 25 | 27 | 33 |  |

б) В трех продуктах питательные вещества содержаться в следующем количестве:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| питательные вещества | продукты | | | потребность |
| 1 | 2 | 3 |
| жиры | 3 | 0 | 4 | от 5% до 30% кол-ва белков |
| белки | 10 | 1 | 2 | >20 ед. |
| углеводы | 0 | 4 | 3 | <30 % кол-ва жиров |
| витамины | 4 | 6 | 2 | >40 ед. |
| цена | 32 | 18 | 10 |  |

Составить рацион минимальной стоимости.

***Вариант 3***

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | s1 | s2 | s3 | s4 | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| wl | 2 | 2 | 2 | 4 | 15 |
| w2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 25 |
| w3 | 3 | 6 | 3 | 4 | 20 |
| потребность | 20 | 12 | 5 | 9 |  |

б) В трех продуктах питательные вещества содержаться в следующем количестве:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| питательные | продукты | | | потребность |
| вещества | 1 | 2 | 3 |  |
| жиры | 3 | 0 | 4 | от 5 % до 30% кол-ва белков |
| белки | 10 | 1 | 2 | >20 ед. |
| углеводы | 0 | 4 | 3 | <30 % кол-ва жиров |
| витамины | 4 | 6 | 2 | >40 ед. |
| цена | 32 | 18 | 10 |  |

Составить рацион минимальной стоимости.

**Вариант 4**

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | В1 | В2 | ВЗ | В4 | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| А1 | 4 | 3 | 3 | 1 | 8 |
| А2 | 3 | 2 | 4 | 8 | 11 |
| A3 | 5 | 4 | 6 | 3 | 16 |
| потребность | 4 | 9 | 9 | 13 |  |

б) Для производства чая сортов А и В смешивают в различных пропорциях индийский и грузинский

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| сырье | доля в чае | | ресурс Т | цена сырья |
| А | В |
| индийский | >50% | <20% | 600 | 500 |
| грузинский |  |  | 870 | 400 |
| цена готового | 820 | 790 |  |  |

Сколько Т индийского и грузинского чая должно пойти на приготовление чая А и В, чтобы прибыль от продажи А и В была максимальной?

***Вариант 5***

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | *W* | *X* | Y | *z* | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| А | 1 | 4 | 1 | 9 | 60 |
| В | 9 | 2 | 2 | 8 | 30 |
| С | 6 | 1 | 7 | 3 | 30 |
| потребность | 15 | 25 | 27 | 33 |  |

б) Для производства чая сортов А и В смешивают в различных

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| сырье | доля в чае | | ресурс Т | цена сырья |
| А | В |
| индийский | >50% | <20% | 600 | 500 |
| грузинский |  |  | 870 | 400 |
| цена готового | 820 | 790 |  |  |

Сколько Т индийского и грузинского чая должно пойти на приготовление чая А и В, чтобы прибыль от продажи А и В была максимальной?

*Вариант 6*

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | *si* | *s2* | *s3* | *s4* | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| *w1* | 2 | 2 | 2 | 4 | 15 |
| *w2* | 3 | 1 | 1 | 3 | 25 |
| *w3* | 3 | 6 | 3 | 4 | 20 |
| потребность | 20 | 12 | 5 | 9 |  |

б) Для производства чая сорта А и В смешивают в различных

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| сырье | доля в чае | | ресурс Т | цена сырья |
| А | В |
| индийский | >50% | <20% | 600 | 500 |
| грузинский |  |  | 870 | 400 |
| цена готового | 820 | 790 |  |  |

Сколько Т индийского и грузинского чая должно пойти на приготовление чая А и В, чтобы прибыль от продажи А и В была максимальной?

***Вариант 7***

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | В1 | В2 | ВЗ | В4 | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| А1 | 4 | 3 | 3 | 1 | 8 |
| А2 | 3 | 2 | 4 | 8 | 11 |
| A3 | 5 | 4 | 6 | 3 | 16 |
| потребность | 4 | 9 | 9 | 13 |  |

б) Завод изготавливает продукцию четырёх видов, потребность:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| показатель | продукция | | | | ресурс |
| П1 | П2 | ПЗ | П4 |
| раб. сис. чел-час | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 500 |
| сырье, кг | 4 | 2 | 6 | 8 | 2500 |
| прибыль, руб. | 5 | 5 | 12,5 | 10 |  |

Для производства 1 ед. каждой продукции дана в таблице. Найти количество выпускаемой продукции, максимизировать прибыль, если продукции *П2* можно выпускать не более 50 % от количества *П1* и *П4* вместе, а *ПЗ* от 10% до 70% количества *П1*, *П2* и *П4* вместе.

***Вариант 8***

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *потребители* | *W* | *X* | *У* | *z* | *производство* |
| *производители* |  |  |  |  |  |
| *А* | *1* | *4* | *1* | *9* | *60* |
| *В* | *9* | *2* | *2* | *8* | *30* |
| *С* | *6* | *1* | *7* | *3* | *30* |
| *потребность* | *15* | *25* | *27* | 33 |  |

б) Завод изготавливает продукцию четырёх видов, потребность:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| показатель | продукция | | | | ресурс |
|  | П1 | П2 | ПЗ | П4 |  |
| раб. сис. чел-час | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 500 |
| сырье, кг | 4 | 2 | 6 | 8 | 2500 |
| прибыль, руб. | 5 | 5 | 12,5 | 10 |  |

Для производства 1 ед. каждой продукции дана в таблице. Найти количество выпускаемой продукции, максимизировать прибыль, если продукции П2 можно выпускать не более 50 % от количества П1 и П4 вместе, а ПЗ от 10% до 70% количества П1, П2 и П4 вместе.

***Вариант 9***

а) Решить транспортную задачу

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| потребители | *s1* | *s2* | *s3* | *s4* | производство |
| производители |  |  |  |  |  |
| *w1* | 2 | 2 | 2 | 4 | 15 |
| *w2* | 3 | 1 | 1 | 3 | 25 |
| *w3* | 3 | 6 | 3 | 4 | 20 |
| потребность | 20 | 12 | 5 | 9 |  |

б) Завод изготавливает продукцию четырёх видов, потребность:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| показатель | продукция | | | | ресурс |
| П1 | П2 | ПЗ | П4 |
| раб. сис. чел-час | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 500 |
| сырье, кг | 4 | 2 | 6 | 8 | 2500 |
| прибыль, руб. | 5 | 5 | 12,5 | 10 |  |

Для производства 1 ед. каждой продукции дана в таблице. Найти количество выпускаемой продукции , максимизировать прибыль, если продукции *П2* можно выпускать не более 50 % от количества *П1* и *П4* вместе, а *ПЗ* от 10% до 70% количества *П1*, *П2* и *П4* вместе.

Приложение 5

Исходные данные по выполнению работы «Комплекты и пропорции. Выпуск разнородной продукции на одном оборудовании»

***Вариант 1***

а) Предприятие выпускает 4 вида продукции. Затраты ресурсов и прибыль:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | ПЗ | П4 | ресурс |
| трудозатраты | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 500 |
| сырье | 4 | 2 | 6 | 8 | 2500 |
| прибыль | 5 | 5 | 12,5 | 10 |  |

Количество выпускаемой продукции различного вида должно относиться как 3:2:4:5. При каком плане выпуска прибыль максимальна?

б) Цех №1 может изготовить за смену 600 деталей А или 1200 деталей Б. Цех №2, куда детали поступают на обработку, может обработать за смену 1200 деталей А или 800 деталей Б. Каждая деталь А и Б стоит 100 рублей.

Определить выпуск деталей А и Б за смену, чтобы стоимость продукции была максимальной?

*Вариант* 2

а) Предприятие выпускает 4 вида продукции. Затраты ресурсов и прибыль:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | ПЗ | П4 | ресурс |
| трудозатраты | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 500 |
| сырье | 4 | 2 | 6 | 8 | 2500 |
| прибыль | 5 | 5 | 12,5 | 10 |  |

Количество выпускаемой продукции различного вида должно относиться как 3:2:4:5. При каком плане выпуска прибыль максимальна?

б) Завод выпускает 3 вида продукции, используя 3 различных технологии. Выход продукции из 1 ед. сырья и максимально возможное количество переработанного сырья за смену в табл.

Имеется 110 единиц сырья. Как следует распределить их по технологическим признакам, чтобы прибыль была максимальна (технологические приемы можно менять в течении смены)?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Технология | Выход из 1 ед. сырья | | | Макс. кол-во сырья за смену |
|  | П1 | П2 | ПЗ |  |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 100 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 90 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| Прибыль | 10 | 8 | 5 |  |

***Вариант 3***

а) Предприятие выпускает 4 вида продукции. Затраты ресурсов и прибыль:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | ПЗ | П4 | ресурс |
| трудозатраты | 0,5 | 1,5 | 2 | 1,5 | 500 |
| сырье | 4 | 2 | 6 | 8 | 2500 |
| прибыль | 5 | 5 | 12,5 | 10 |  |

Количество выпускаемой продукции различного вида должно относиться как 3:2:4:5 При каком плане выпуска прибыль максимальна?

б) Завод выпускает 3 изделия:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | И1 | И2 | И3 | Ресурс |
| Раб.сила | 5 | 20 | 15 | 5000 |
| Сырье | 4 | 6 | 8 | 2500 |
| Прибыль | 5 | 12,5 | 10 |  |

За смену можно выпустить 600 штук изделия И1 или 450 штук И2 или 500 штук ИЗ. Сколько изделий надо выпустить за смену, чтобы прибыль была максимальна?

***Вариант 4***

а) Тремя автомашинами организуют грузовые перевозки в А, В, и С.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Автомашина | А | В | С |
| 1 | 24 | 16 | 8 |
| 2 | 21 | 15 | 7 |
| 3 | 23 | 14 | 7 |
| Количество рейсов | 10 | 15 | 20 |

Как организовать перевозки, чтобы их суммарная стоимость была минимальной, а количество рейсов, выполняемых 1, 2 и 3 компаниями относились как 2:6:1?

б) Цех №1 может изготовить за смену 600 деталей А или 1200 деталей Б. Цех №2, куда детали поступают на обработку, может обработать за смену 1200 деталей А или 800 деталей Б. Каждая деталь А и Б стоит 100 рублей.

Определить выпуск деталей А и Б за смену, чтобы стоимость продукции была максимальной?

***Вариант 5***

а) Тремя автомашинами организуют грузовые перевозки в А, В, и С.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Автомашина | А | В | С |
| 1 | 24 | 16 | 8 |
| 2 | 21 | 15 | 7 |
| 3 | 23 | 14 | 7 |
| Количество рейсов | 10 | 15 | 20 |

Как организовать перевозки, чтобы их суммарная стоимость была минимальной, а количество рейсов, выполняемых 1, 2 и 3 компаниями относились как 2:6:1?

б) Завод выпускает 3 вида продукции, используя 3 различных технологии. Выход продукции из 1ед. сырья и максимально возможное количество переработанного сырья за смену в табл.:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Технология | Выход из 1 ед. сырья | | | Макс. кол-во сырья за смену |
| П1 | П2 | П2 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 100 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 90 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| Прибыль | 10 | 8 | 5 |  |

Имеется 110 единиц сырья. Как следует распределить их по технологическим признакам, чтобы прибыль была максимальна (технологические приемы можно менять в течение смены)?

***Вариант 6***

а) Тремя автомашинами организуют грузовые перевозки в А, В, и С.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Автомашина | А | В | С |
| 1 | 24 | 16 | 8 |
| 2 | 21 | 15 | 7 |
| 3 | 23 | 14 | 7 |
| Кол-во рейсов | 10 | 15 | 20 |

Как организовать перевозки, чтобы их суммарная стоимость была минимальной, а количество рейсов, выполняемых 1, 2 и 3 компаниями относились как 2:6:1?

б) Завод выпускает 3 изделия:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | И1 | И2 | И3 | Ресурс |
| Раб. Сила | 5 | 20 | 15 | 5000 |
| Сырье | 4 | 6 | 8 | 2500 |
| Прибыль | 5 | 12,5 | 10 |  |

За смену можно выпустить 600 штук изделия И1 или 450 И2 или 500 штук И3. Сколько изделий надо выпустить за смену, чтобы прибыль была максимальна?

***Вариант 7***

а) Имеется 4 продукта с содержанием белков, жиров и углеводов:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вещество | Содержание ед. в 1кг | | | | Кол-во |
|  |  |  |  |  | ед. в 1 |
|  | Пр | Пр | Пр | Пр | порции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |  |
| Белки | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| Жиры | 1 | 0,5 | 2 | 1 | 1 |
| Углеводы | 6 | 7 | 2 | 4 | 4 |
| Запас | 2 | 5 | 4 | 3 |  |

Сколько надо взять каждого продукта, чтобы количество порций было максимально?

б) Цех №1 может изготовить за смену 600 деталей А или 1200 деталей Б. Цех №2, куда детали поступают на обработку, может обработать за смену 1200 деталей А или 800 деталей Б. Каждая деталь А и Б стоит 100 рублей.

Определить выпуск деталей А и Б за смену, чтобы стоимость продукции была максимальной?

*Вариант 8*

а) Имеется 4 продукта с содержанием белков, жиров и углеводов. Сколько надо взять каждого продукта, чтобы количество порций было максимально?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вещество | Содержание ед. в 1 кг | | | | Кол-во |
|  |  |  |  |  | ед. в 1 |
|  | Пр 1 | Пр  2 | Пр  3 | Пр  4 | порции |
| Белки | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| Жиры | 1 | 0,5 | 2 | 1 | 1 |
| Углеводы | 6 | 7 | 2 | 4 | 4 |
| Запас | 2 | 5 | 4 | 3 |  |

б) Завод выпускает 3 вида продукции, используя 3 различных технологии. Выход продукции из 1 ед. сырья и максимально возможное количество переработанного сырья за смену в табл.:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Технология | Выход из 1 ед.  сырья | | | Макс, кол-во  Сырья за смену |
| П1 | П2 | ПЗ |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 100 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 90 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 120 |
| Прибыль | 10 | 8 | 5 |  |

Имеется 110 единиц сырья. Как следует распределить их по технологическим признакам была максимальна (технологические приемы можно менять в течении смены)?

*Вариант 9*

а) Имеется 4 продукта с содержанием белков, жиров и углеводов. Сколько надо взять каждого продукта, чтобы количество порций было максимально?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вещество | Содержание  ед. в 1 кг | | | | Кол-во |
|  |  |  |  |  | ед. в 1 |
|  | Пр | Пр | Пр | Пр | порции |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |  |
| Белки | 2 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| Жиры | 1 | 0,5 | 2 | 1 | 1 |
| Углеводы | 6 | 7 | 2 | 4 | 4 |
| Запас | 2 | 5 | 4 | 3 |  |

Сколько надо взять каждого продукта, чтобы количество порций было максимально?

б) Завод выпускает 3 изделия:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | И1 | И2 | ИЗ | Ресурс |
| Раб.сила | 5 | 20 | 15 | 5000 |
| Сырье | 4 | 6 | 8 | 2500 |
| Прибыль | 5 | 12,5 | 10 |  |

За смену можно выпустить 600 штук изделия И1 или 450 штук И2 или 500 штук ИЗ. Сколько изделий надо выпустить за смену, чтобы прибыль была максимальна?

Приложение 6

Исходные данные по выполнению расчетно- практической работы

*Вариант 1*

Предприятие рекламирует свою продукцию с использованием четырёх средств: телевидения, радио, газет, афиш. Прошлый опыт говорит, что 1$, затраченный на рекламу, приносит дополнительную прибыль соответственно в $10, $3, $7, $4. Распределение средств должно подчиняться следующим ограничениям:

полный бюджет на рекламу - не более $500 тысяч;

на телевидение надо расходовать не более 40%, а на афиши не более 20% всей суммы;

на радио ладо расходовать не менее того, что расходуется на телевидение.

Как распределить средства на рекламу, чтобы полученная дополнительная прибыль была максимальна?

*Вариант 2*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Питательные вещества | Содержание в продуктах | | | | |
| хлеб | соя | рыба | фрукты | молоко |
| белки | 2 | 12 | 10 | 1 | 2 |
| жиры | 1 | 8 | 3 | 0 | 4 |
| углеводы | 12 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| витамины | 2 | 2 | 4 | 6 | 2 |
| цена | 12 | 36 | 32 | 18 | 10 |

Дневная диета должна содержать, как минимум, 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов.

Количество потребляемых жиров должно быть не менее 30 % от количества углеводов и не более 80 % от количества белков.

Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице содержания питательных веществ и ценах пяти имеющихся продуктов?

*Вариант 3*

Предприятие должно работать 24 часа в сутки, согласно таблице. Каждый рабочий должен работать 8 часов подряд. Определить такое количество рабочих, вышедших не работу в каждый четырёхчасовой интервал, при

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Время суток | 2-6 | 6-  10 | 10-  14 | 14-  18 | 18-  22 | 22-  24 |
| Минимально необходимое количество рабочих | 4 | 8 | 10 | 7 | 12 | 4 |

*Вариант 4*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| изделие | Потребность в сырье на 1 изделие | | Прибыль от 1 изделия |
|  | А | В |  |
| I | 3 | 1 | $3 |
| II | 4 | 3 | $6 |
| III | 1 | 2 | $2 |
| Есть в наличии | 20 | 10 |  |

Найти наиболее прибыльный план производства изделий.

*Вариант 5*

Заготовки для деталей А, В и С надо обработать на станках I и И. При каком плане производства каждого изделия прибыль максимальна?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Станок | Время обработки 1 заготовки (час) | | | Фонд  времени |
| А | В | С |
| I | 3 | 2 | 3 | 12 |
| II | 4 | 1 | 2 | 15 |
| Прибыль от одно  го изделия | 3 | 4 | 5 |  |

***Вариант 6***

Имеется 3 завода, способные произвести за месяц 50, 30 и 20 тысяч тонн продукции. Имеется 4 потребителя с потребностями 12, 15,25 и 36 тыс. тонн. Стоимость перевозки 1 тыс. тонн продукции дана в таблице. Не менее 50 % продукции, потребляемой потребителем 1, должно поступать с первого завода. Определить план перевозок, минимизирующих их стоимость.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Потребитель | Завод | | |
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 15 | 19 | 14 |
| 2 | 19 | 18 | 16 |
| 3 | 19 | 18 | 20 |
| 4 | 15 | 19 | 18 |

***Вариант 7***

Завод производит продукцию трёх типов: П1, П2, ПЗ. Для производства каждого изделия необходимо 3 технологические операции: 01, 02, О3. В день можно производить не более 170 ед. продукции. Найти наиболее прибыльный способ производства.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Операция | Объем работ на 1 изделие (чел.-час) | | | Дневной фонд времени (час) |
| П1 | П2 | ПЗ |
| 01 | 2 | 3 | 2 | 360 |
| 02 | 1 | 2 | 3 | 240 |
| 03 | 1 | 1 | 2 | 180 |
| Прибыль от 1 изделия | $15 | $22 | $19 |  |

***Вариант 8***

Предприятие выпускает 3 изделия. Для выпуска одного изделия необходимо сырье в количестве 3 кг для первого изделия, 8кг - для второго и 1 кг - для третьего. Общий запас сырья - 9500кг. Изделия 1, 2 и 3 входят в комплект в количестве 2, 1 и 5 штук соответственно. Комплекты немедленно отправляются потребителю. Если будет выпущено лишнее количество изделий № 2, то на складе можно разместить не более 20 штук. Определить оптимальное количество выпускаемых изделий, при котором количество комплектов максимально.

***Вариант 9***

Завод может использовать 3 технологии для выпуска 4-х изделий. Применение определенной технологии однозначно определяет выход изделий из 1т. сырья. Имеется 15 тонн сырья. Сколько тонн сырья необходимо использовать для каждой технологии при получении максимального дохода?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Технология | Выход изделий из 1 т. сырья(шт) | | | |
| И1 | И2 | ИЗ | И4 |
| Т1 | 3 | 2 | 8 | 1 |
| Т2 | 5 | 4 | 2 | 2 |
| ТЗ | 8 | 1 | 4 | 1 |
| Доход от 1 шт | 10 | 15 | 6 | 20 |
| План выпуска | 76 | 55 | 38 | 28 |

***Вариант 10***

Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сортов А и В, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. Поставщики готовы продать фабрике индийского чая не более 600т по цене $600 за тонну, грузинского - не более 870т по цене $500 за тонну, краснодарского - не более 430т по цене $600 за тонну.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ингредиент | Нормы расхода(т/т) | |
| А | В |
| индийский | 0,5 | 0,2 |
| грузинский | 0,2 | 0,6 |
| краснодарский | 0,3 | 0,2 |
| Отпускная цена 1 т | $674 | $586 |

Определить наиболее прибыльную программу выпуска чая фабрикой и сколько каждого ингредиента надо закупить, если на рынке можно реализовать не более 1725т чая?

***Вариант 11***

Изготовление продукции двух видов П1 и П2 требует четырех видов сырья :S1, S2, S3, S4. Запасы каждого сырья - 19,13,15 и 18 усл. ед. Потребность в сырье для выпуска 1 ед. продукции и получаемая от нее прибыль - в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Сырье | Продукция | |
|  | П1 | П2 |
| S1 | 2 | 3 |
| S2 | 2 | 1 |
| S3 | 0 | 3 |
| S4 | 3 | 0 |
| Прибыль | $7 | $5 |

На бирже за 1 ед. сырья S3 предлагают $4. Сколько сырья можно продать, и сколько продукции каждого вида нужно выпустить, чтобы в итоге прибыль была максимальной?

***Вариант 12***

Технологический процесс состоит из двух этапов. На первом этапе сырье перерабатывается в 3 промежуточных продуктах А, В, С, которые на втором этапе используются для изготовления конечной продукции.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Промежуточный продукт | Выход из 1т сырья (кг) | Расход на 1 т конечного продукта (кг) | |
| I | II |
| А | 460 | 250 | 800 |
| В | 200 | 250 | 200 |
| С | 340 | 500 | 0 |

Оптовая цена 1т конечного продукта I вида - $50, П вида - $60. Какое количество конечного продукта каждого вида из 1т сырья надо выпускать, чтобы суммарная стоимость продукции была максимальна?

***Вариант 13***

Бройлерное хозяйство содержит 20000 цыплят. Недельный расход корма на 1 цыпленка не менее 1 фунта.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ингредиент | Содержание питательных веществ (фунт/фунт) | | | Стоимость за фунт |
| Кальций | Белок | Клетчатка |
| Известняк | 0,38 | - | - | $0,04 |
| Зерно | 0,001 | 0,09 | 0,02 | $0,15 |
| Соя | 0,002 | 0,50 | 0,08 | $0,40 |

Не менее 22% веса смеси должен составлять белок, не более 5% - клетчатка, кальция должно от 0,8% до 1,2%. Какое количество каждого ингредиента надо заготовить на 20000 недельных порций, чтобы их стоимость была минимальной?

***Вариант 14***

Необходимо засеять 4 поля пшеницей и кукурузой. Согласно госзаказу необходимо не менее 12000 ц. пшеницы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Поле | площадь | Урожайность | |
| пшеница | Кукуруза |
| 1 | 400 | 20 | 35 |
| 2 | 300 | 35 | 50 |
| 3 | 200 | 25 | 40 |
| 4 | 100 | 30 | 45 |
| Доход от 1 ц. |  | 7 | 5 |

Какие площади надо засеять на каждом поле пшеницей и кукурузой, чтобы доход от продажи был максимальным?

***Вариант 15***

Пищевой концентрат для космонавтов содержит 5 продуктов и должен полностью усваиваться организмом.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Аминокислота | Содержание в продуктах (г/100 г) | | | | | Доля в порции |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| валин | 2 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 |
| лизин | 10 | 4 | 15 | 20 | 3 | 7 |
| треонин | 8 | 0 | 3 | 0 | 3 | 2 |
| трептофан | 3 | 10 | 3 | 1 | 3 | 4 |

Для этого количество четырёх незаменимых аминокислот должно поступать в пропорции 1:7:2:4. То, что поступает сверх

пропорции, не усваивается организмом. Лизина должно поступать не менее 50г в день. Определить рецепт дневной порции концентрата минимального веса.

***Вариант 16***

Завод производит за месяц 1500 тыс. литров анкилата, 1200 тыс. литров крекинг-бензина и 1300 тыс. литров изопентана. В результате смешивания этих компонентов в пропорции 1:1:1 и 3:1:2 получает бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 литров бензина А - 90р., Б - 120р. Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость продукции.

***Вариант 17***

Рацион кормления коров на ферме состоит из трёх продуктов, содержащих белки, кальций и витамины. Потребность одной коровы в сутки - не менее 2000г белков и 210г кальция. Потребность в витаминах строго дозирована и составляет 0,087г в сутки.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Продукты | Содержание питательных веществ | | |
| Белки г/кг | Кальций г/кг | Витамины г/кг |
| сено | 50 | 10 | 2 |
| силос | 70 | 6 | 3 |
| концентраты | 180 | 3 | 1 |

Составить самый дешевый рацион, если цена 1 кг сена, силоса и концентрата составляет соответственно 1.5,2.0 и 6.0 усл. ед., и 10 коров не могут съесть более 3,2ц корма в сутки.

*Вариант 18*

Имеется 5 продуктов.

Вес порции - не более 1кг. Не менее 70% потребляемых белков должно быть животного происхождения. Составить рацион максимальной калорийности.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Продукты | Пищевая ценность | | |
| белки | витамины | Калорийность |
| хлеб | 2 | 2 | 282 |
| соя | 12 | 2 | 529 |
| рыба | 10 | 4 | 302 |
| фрукты | 1 | 6 | 88 |
| молоко | 2 | 2 | 240 |
| Минимальная | 20 | 40 |  |
| потребность |

***Вариант 19***

Производственные мощности механического цеха позволяют изготовить за смену 600 деталей А или 1200 деталей Б. Мощность термического цеха, куда эти детали поступают на обработку в тот же день, позволяет обработать за смену 1200 деталей А или 800 деталей Б. Механический цех работает в 3 смены, а термический - в 2. Определить суточный выпуск деталей А и Б, максимизирующий их общее количество.

**Тесты к главе 1**

1. Микромодель – это…

А) модель объекта в целом;

Б) модель отдельных частей объекта;

В) модель процесса, состоящего из отдельных частей;

Г) модель процесса в целом;

1. Чтобы рассматриваемый объект, процесс или явление можно было считать системой он должен обладать следующими свойствами:

А) целостность и делимость, наличие существенных связей, наличие определенной организации, интегративность;

Б) целостность и делимость, точность, наличие определенной организации, интегративность;

В) целостность и делимость, точность, наличие определенной организации, системность;

Г) целостность и делимость, наличие существенных связей, отсутствие определенной организации, интегративность.

1. Интегративность– это…

А) свойство означает, что с одной стороны система - это некоторое целостное образование, а с другой стороны - в ее составе могу быть выделены подсистемы и элементы;

Б) свойство, по которому можно выделить систему из внешней среды в виде целостного образования;

В) наличие таких свойств системы, которыми обладает система в целом, но не обладает ни один её элементов в отдельности;

Г) формирование (установление) существенных связей между элементами, упорядочивание и распределение связей и элементов во времени и пространстве.

1. Системный подход – это…

А) это форма методологического познания, связанная с исследованием и созданием объектов как систем, и относится только к системам;

Б) это подход к исследованию объекта (проблемы, явления, процесса) как к системе, в которой выделены элементы, внутренние и внешние связи, наиболее существенным образом влияющие на исследуемые результаты его функционирования, а цели каждого из элементов, подчинены его общему предназначению;

В) это такое направление методологии научного познания и практической деятельности, в основе которого лежит исследование любого объекта как сложной целостной социально-экономической системы;

Г) все варианты верны.

1. Модель синтеза позволяет…

А) создать объект с заданным набором свойств;

Б) изучить свойства созданного объекта;

В) создать структуру процесса;

Г) изучить структуру процесса;

1. Модель решения – это…

А) представление искомой величины в виде неявной зависимости через исходные данные;

Б) это набор зависимостей и правил, в виде математических выражений, указывающих способ получения решения задачи;

В) это набор выражений, позволяющих получить решение в виде совокупности функций;

Г) процесс определения параметров (номиналов) элементов синтезируемого объекта, при которых будут удовлетворены условия задачи.

1. Модели, неизменные во времени это…

А) динамические модели;

Б) модели с сосредоточенными параметрами;

В) статические модели;

Г) модели с распределенными параметрами.

1. Сколько классов исследования стационарного состояния существует:

А) 1;

Б) 2;

В) 3;  
Г) 4;

**Тесты к главе 2**

1. Задачи оптимизации делятся на:

А) скалярную оптимизацию и векторную оптимизацию;

Б) скалярную оптимизацию и системную оптимизацию;

В) системную оптимизацию и векторную оптимизацию;

Г) скалярную оптимизацию и физическую оптимизацию;

1. Целевая функция – это…

А) функция, для которой в задаче надо построить график;

Б) функция, для которой в задаче надо найти максимум или минимум;

В) функция, у которой существует дифференциал (в данной точке);

Г) функция, у которой производная равна нулю 0.

1. Симплекс-метод – это…

А) геометрический способ решения задачи линейного программирования;

Б)численный способ решения задачи нелинейного программирования;

В) геометрический способ решения задачи нелинейного программирования;

Г) численный способ решения задачи линейного программирования;

1. Основная идея симплекс-метода – это…

А) перебор линейных точек и выбор лучшей, т.е. той, где целевая функция максимальна или минимальна;

Б) вычисление угловых точек и выбор лучшей, т.е. той, где целевая функция максимальна или минимальна;

В) перебор угловых точек и выбор лучшей, т.е. той, где целевая функция максимальна или минимальна;

Г) вычисление линейных точек и выбор лучшей, т.е. той, где целевая функция максимальна или минимальна;

1. Для составления симплекс-таблиц все переменные разбивают на 2 множества:

А) базисные и небазисные переменные;

Б) линейные и нелинейные переменные;

В) угловые и линейные переменные;

Г) базисные и линейные переменные;

1. Третий этап симплекс-метода – это…

А) подбор базисных точек;

Б) вычисление базисных точек;

В) построение базисных точек;

Г) перебор базисных точек.

**Тесты к главе 3**

1. Ценность математического описания заключается в том, что оно:

А) дает информацию о влиянии факторов;

Б) позволяет количественно определить значения функций отклика при заданном режиме ведения процесса;

В) может служить основой для оптимизации;

Г) все ответы верны;

1. Математические модели, получаемые с помощью методов планирования эксперимента, принято называть…

А) экспериментальный;

Б) статический:;

В) экспериментально-статический;

Г) экспериментально-динамический;

1. Уравнение регрессии имеет вид:

А) *y=k0b0+b1x1+b2x2+…bnxn+b12x12+ b(n-1)nx(n-1)xn;*

Б)*y=kb0+kb1x1+kb2x2+…kbnxn+kb12x12+ kb(n-1)nx(n-1)xn;*

В) *y=b0+b1x1+b2x2+…bnxn+b12x12+ b(n-1)nx(n-1)xn;*

Г)*x=b0+b1x1+b2x2+…bnxn+b12x12+ b(n-1)nx(n-1)xn;*

1. Коэффициент регрессии значим, если выполнено условие:

А) *\b\>sbt*

Б) *\b\<sbt*

В) *b>sbt*

Г) *\b\=sbt*

1. Величина, характеризующая уровень оптимизации процесса, называется…

А) критерием объективности;

Б) критерием оптимальности;

В) критерием адекватности;

Г) критерием точности.

1. Симплексом называется правильный многогранник, имеющий *…* вершину, где *n* – число факторов, влияющих на процесс.

А) n–1;

Б) n+1;

В) n+2;

Г) n;

**Тесты к главе 4**

1. Для задачи интерполяции функции *f(х)* и *φ(х; θ)* считаются "близкими", если…

А) *f(yj)* = *φ(х;θ);*

Б) *f(xj)* = *φ(х;θ);*

В) *f(yj)* = *φ(y;θ);*

Г) *f(xj)* = *φ(х;y);*

1. Одну из простейших формул интерполяции позволяет построить метод:

А) Лагранжа;

Б) Гаусса;

В) Крамера;

Г) Евклида.

1. Для аппроксимации функций на практике часто используется интерполяционный полином:

А) Архимеда;

Б) Ньютона;

В) Евклида;

Г) Крамера.

1. Если ошибки в экспериментальных данных являются существенными, в качестве критерия близости функций можно взять сумму квадратов, а соответствующий метод аппроксимации называется методом:

А) наибольших квадратов;

Б) наименьших квадратов;

В) Гаусса;

Г) наименьших треугольников.

# Библиографический список

1. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. М., “Металлургия”, 1969. - 157с.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.Б., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М., “Наука”, 1971. - 283с.
3. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.П. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Мир, 1998. – 575с.
4. Бартеньев О.В. Фортран для студентов. М.: Диалог–МИФИ, 2006. - 397 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 2006. - 631 с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. - 632 с.
7. Васильев С.Н,Матросов В.М., Москаленко А.И.. Нелинейная теория управления и ее приложения. М.:ФМЛ, 2008, - 320 с.
8. Веников В. А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования. - М.: Высшая школа, 1984. – 479c.
9. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология – М.:Высшая школа, 2007.
10. Воробьев Г. Н., Данилова А. Н. “Практикум по численным методам.” - М.:”Высш. шк.”, 2007 г. -184 с.
11. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. Учебник. – СПб.: Лань, 2007.-528c.
12. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2т. учеб. пособ. – М.: Высш. шк., 2008. – 304c.
13. Зедгинидзе Н.Г. Математическое планирование эксперимента для исследования и оптимизации свойств смесей. Тбилиси, “Мецинереба”, 1971. - 151c.
14. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.:Наука, 1978. – 512с.
15. Клепиков Н.Л., Соколов С.Н. Анализ и планирование эксперимента методом максимума правдоподобия. М., Физматгиз, 1964. - 184с.
16. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 224с.
17. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Фазис, 2007.
18. Лобанов А.И., Петров И.Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. Часть 1. – М.: МФТИ, 2000 – 168с.
19. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608с.
20. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИКАП, 1994. – 382с.
21. Пелих А.С., Терехов Л.Л.,. Терехова Л.А Экономико-математические методы и модели управления производством. – Ростов –на –Дону. Феникс. 2009. - 248c.
22. Первозванский А.А.Математические модели в управлении производством. - М. : Наука, 1975.- 615 с.
23. Протасов И.Д. Лекции по вычислительной математике: учеб. пособ. – М.: Гелиос АРВ, 2009. – 184c.
24. Рябенький В.С. Введение в вычислительную математику. – М.: Наука-Физматлит, 1994. -335с. 2-е изд. М.: Физматлит, 2000. — 296 с.
25. Самарский А А., Гулин А В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. – 430c.
26. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи, методы, примеры. – М.: Физматлит, 2008.- 320c.
27. Саутин С.Н. Планирование эксперимента в химии и химической технологии. –Л.: Химия, 1975. – 48с.
28. Таран Т.А. Логические методы и модели поддержки принятия решений в конфликтных ситуациях. Переславль-Залесский. 2007. – 240c.
29. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. Учебное пособие. – М.: Русская Деловая Литература, 2007. – 256c.
30. Шебеко Ю.А. Имитационное моделирование и ситуационный анализ бизнес-процессов принятия управленческих решений. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 158c.
31. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении –М.: Дело 2009. – 440c.

**Содержание**

[1. Основные понятия и определения 3](#_Toc361002075)

[1.1 Цель курса 3](#_Toc361002076)

[1.2 Изоморфные и гомоморфные системы 5](#_Toc361002077)

[1.3 Система и ее свойства 7](#_Toc361002078)

[1.4 Системный подход 9](#_Toc361002079)

[1.5 Структурная модель. Функциональная модель 11](#_Toc361002080)

[1.6 Модель синтеза. Модель солида. Модель принятия решения 12](#_Toc361002081)

[1.7 Модель описания. Модель решения. Алгоритмическая модель. Программная модель 15](#_Toc361002082)

[1.8 Теоретическая модель. Эмпирическая (экспериментальная) модель 18](#_Toc361002083)

[1.9 Критерии качества математической модели 24](#_Toc361002084)

[1.10 Основные виды математических моделей 25](#_Toc361002085)

[1.11 Ячеечная модель с обратными потоками 39](#_Toc361002086)

[(рециркуляционная) 39](#_Toc361002087)

[1.12 Комбинированные модели 42](#_Toc361002088)

[1.13 Комбинированные модели, составления из параллельно соединённых зон 45](#_Toc361002089)

[2. Модели оптимизации. Линейное программирование 48](#_Toc361002090)

[2.1 Геометрическая интерпретация модели 50](#_Toc361002091)

[2.2 Пример решения задачи скалярной оптимизации графическим методом 52](#_Toc361002092)

[2.3 Симплекс- метод решения задачи линейного 57](#_Toc361002093)

[программирования 57](#_Toc361002094)

[3. Экспериментально-статистичесикие модели 64](#_Toc361002095)

[3.1 Математическое описание 64](#_Toc361002096)

[3.2. Полный факторный эксперимент 64](#_Toc361002097)

[3.3 Метод дробных реплик 67](#_Toc361002098)

[3.4 Метод крутого восхождения 70](#_Toc361002099)

[3.3 Симплексный метод 72](#_Toc361002100)

[4. Аппроксимация функций, заданных экспериментальными данными с помощью алгебраических и тригонометрических многочленов 76](#_Toc361002101)

[4.1 Аппроксимация функций с помощью алгебраических интерполяционных полиномов 77](#_Toc361002102)

[4.2 Интерполяционная формула Лагранжа 78](#_Toc361002103)

[4.3 Интерполяционная формула Ньютона 86](#_Toc361002104)

[4.4 Интерполирование периодических функций, заданных экспериментальными данными 92](#_Toc361002105)

[ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ 95](#_Toc361002106)

[Лабораторная работа № 1 96](#_Toc361002107)

[Лабораторная работа № 2 100](#_Toc361002108)

[Лабораторная работа № 3 106](#_Toc361002109)

[Лабораторная работа № 4 110](#_Toc361002110)

[Лабораторная работа № 5 115](#_Toc361002111)

[РАСЧЕТНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 118](#_Toc361002112)

[Приложение 1 121](#_Toc361002113)

[Приложение 2 123](#_Toc361002114)

[Приложение 3 125](#_Toc361002115)

[Приложение 4 132](#_Toc361002116)

[Приложение 5 138](#_Toc361002117)

[Приложение 6 145](#_Toc361002118)

[Тесты к главе 1 157](#_Toc361002115)

[Тесты к главе 2 159](#_Toc361002116)

[Тесты к главе 3 160](#_Toc361002117)

[Тесты к главе 4 161](#_Toc361002118)

[Библиографический список 163](#_Toc361002119)